zemik2020-09-14（board）

チャレ(62)

$\boxed{1}\sim\boxed{n}$　復元抽出

1 2 3 … k-1 k回目

増加　等しい or 減少で終了 ⇒ k点

(1) $2\leqq k\leqq n+1$ のとき.
得点が k となる確率 $P(k)$ を求める。

考察

1 2 3 … k-1 k

カード番号 $_nC_{k-1}$
並べ方は 小さい順

全体 n^k 通り
条件 $_nC_{k-1}\times\boxed{?}$

k-1番目で場合分け
(k-1 〜 n) で考えて Σ

(i) k回目までに終了しない確率に着目　増加

1 2 … k-1 k

$\dfrac{_nC_k\times 1}{n^k}$　$k\leqq n$

カード番号 $_nC_k$ 通り
並べ方は小さい順 1通り

k回目までに終了する確率は $1-\dfrac{_nC_k}{n^k}$

2回目, 3回目 〜 k回目

$$\therefore P(k)=\left(1-\frac{_nC_k}{n^k}\right)-\left(1-\frac{_nC_{k-1}}{n^{k-1}}\right)$$

くりぬき

(ちょうど k回目) = (k回目まで) − (k-1回目まで)

$$=\frac{n\cdot{}_nC_{k-1}-{}_nC_k}{n^k}$$

以上は $2\leqq k\leqq n$ に限る

(ii) $k=n+1$ のときは.
n回目まで増加し.
(n+1)回目は何でもよい

$$P(n+1)=\frac{_nC_n\times n}{n^{n+1}}=\frac{1}{n^n}$$

63講　[497] 導関数の定義より

一種　$f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

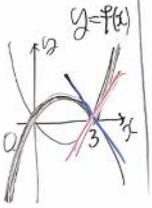
[498] 積の微分, 商の微分

$9x^2+26x-7$,　$-\dfrac{x^2-1}{(x^2-x+1)^2}$,　$\dfrac{7}{4}x^{\frac{3}{4}}=\dfrac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}$

[499] 合成関数の微分

(1) $2(2x+3)(x^2+3x-1)$

(2) $\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$　(3) $\dfrac{x+2}{2(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}$



[500] $f(x)=x|x-3|=\begin{cases}+x(x-3) & (x\geqq 3)\\ -x(x-3) & (x\leqq 3)\end{cases}$ 左

[証1] 公式で微分

$$f'(x)=\begin{cases}2x-3 & (x>3)\\ -2x+3 & (x<3)\end{cases}$$

$\displaystyle\lim_{x\to 3+0}f'(x)=3$

$\displaystyle\lim_{x\to 3-0}f'(x)=-3$

$\displaystyle\lim_{x\to 3+0}f'(x)\neq\lim_{x\to 3-0}f'(x)$

より $x=3$ で
微分可能でない

$f'(3)$ が存在しない

[証2] 定義に戻る

$\displaystyle\lim_{x\to 3+0}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3+0}\frac{+x(x-3)-0}{x-3}$

$\displaystyle\lim_{x\to 3-0}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3-0}\frac{-x(x-3)-0}{x-3}$

より. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ が収束しな

よって $x=3$ で微分可能でない

$f'(3)$ が存在しない

[501] (1) $x=y^2-2y$ のとき $\dfrac{dy}{dx}$ を x で表す

[解1] $y=(x\text{の式})$ に直してから微分

$y=1\pm\sqrt{x+1}$ より　$\dfrac{dy}{dx}=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

[解2] y で微分

$\dfrac{dx}{dy}=2y-2$　$\therefore\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{2(y-1)}$

逆関数の微分公式

[解3] x で微分

$1=\dfrac{d}{dx}(y^2-2y)$

$1=\dfrac{d}{dy}(y^2-2y)\times\dfrac{dy}{dx}$

調節

$1=(2y-2)\times\dfrac{dy}{dx}$

D.I.Y

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の
$x=\dfrac{1}{9}$ における微分係数 $f^{-1\prime}\left(\dfrac{1}{9}\right)$ を…

[解1] 逆関数を求めて微分 & 代入

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}$$

$$f^{-1\prime}(x)=-\frac{1}{3x^2}\left(\frac{1}{x}-1\right)^{-\frac{2}{3}}$$

より $f^{-1\prime}\left(\dfrac{1}{9}\right)=-\dfrac{27}{4}$

[解2] 逆関数 = 鏡の国のアリス　逆数

元　$y=f(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$　$\left(2,\dfrac{1}{9}\right)$　$f'(2)$

逆　$x=f(y)=\dfrac{1}{y^3+1}$　$\left(\dfrac{1}{9},2\right)$　$f^{-1\prime}\left(\dfrac{1}{9}\right)$

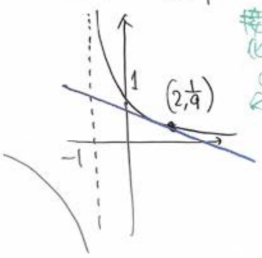
元　$\dfrac{dy}{dx}=f'(x)=-\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}$ より
$f'(2)=-\dfrac{4}{27}$

逆数　逆数

逆　$\dfrac{dy}{dx}=f^{-1\prime}\left(\dfrac{1}{9}\right)=-\dfrac{27}{4}$

[補足]

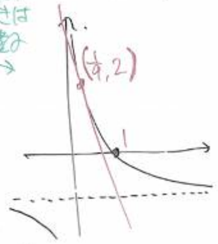
$y=f(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$



接線の傾きは逆数

$x=f(y)=\dfrac{1}{y^3+1}$

$y=f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}-1}$



$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の $x=\frac{1}{9}$ における微分係数 $f^{-1\prime}(\frac{1}{9})$ を…

[解1] 逆関数を求めて微分&代入

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}$$

$$f^{-1\prime}(x)=-\frac{1}{3x^2}\left(\frac{1}{x}-1\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\therefore f^{-1\prime}\left(\frac{1}{9}\right)=-\frac{27}{4}$$

[解2] 逆関数＝鏡の国のアリス

元 $\boxed{y=f(x)=\dfrac{1}{x^3+1}\quad\left(2,\frac{1}{9}\right)}$ $f'(2)$

逆 $\boxed{x=f(y)=\dfrac{1}{y^3+1}\quad\left(\frac{1}{9},2\right)}$ $f^{-1\prime}(\frac{1}{9})$

元 $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)=-\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}$ より

$f'(2)=-\dfrac{4}{27}$

逆数

逆 $\dfrac{dy}{dx}=f^{-1\prime}\left(\frac{1}{9}\right)=-\dfrac{27}{4}$

過去問めぐり 2016 埼玉医 [1] 問2

元 関数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ に対して　$y=f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

逆 $y=f^{-1}(x)$ とする。ここで $f^{-1}(x)$ は $f(x)$ の逆関数である。このとき　$x=f(y)=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$

$1+x^2=\boxed{(5)\ ?}$, $\dfrac{df(y)}{dx}=\boxed{(6)\ ?}$, $y=\boxed{(7)\ ?}$

逆関数を求めるだけ

(5) $1+x^2=1+\left(\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\right)^2$

$=1+\frac{1}{4}(e^{2y}-2+e^{-2y})$

$=\frac{1}{4}(e^{2y}+2+e^{-2y})$

$=\frac{1}{4}(e^y+e^{-y})^2$

$=\left(\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\right)^2$　③

(6) $\dfrac{df(y)}{dx}=\dfrac{dx}{dx}=1$　⑨

[別] $\dfrac{df(y)}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\right)$　yの式をxで微分せよという式

$=\underbrace{\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\right)}_{\text{D.I.Y.}}\times\underbrace{\dfrac{dy}{dx}}_{\text{調節}}$　$x=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$　$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}$

$=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\times\boxed{\dfrac{2}{e^y+e^{-y}}}$

$=1$

---

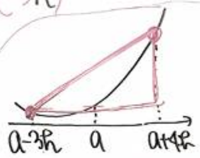
[502] 微分係数 2種　$f'(a)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$　平均変化率　$h=x-a$

(1) (与式) $=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+4h)-f(a)-\{f(a-3h)-f(a)\}}{h}$　← $f(a)$を作る

$=\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{f(a+4h)-f(a)}{4h}\times4-\dfrac{f(a-3h)-f(a)}{(-3h)}\times(-3)\right\}$

$=f'(a)\times4-f'(a)\times(-3)$

$=7f'(a)$



$\dfrac{f(a+4h)-f(a-3h)}{\underset{(a+4h)-(a-3h)}{7h}}\times7$

(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^2f(x)-x^2f(a)}{x-a}$　作る　調節

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^2\cdot\{\boxed{f(x)-f(a)}\}-x^2f(a)+a^2f(a)}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a}\left\{a^2\times\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-\dfrac{x^2-a^2}{x-a}\cdot f(a)\right\}$　$x+a$

$=a^2f'(a)-2a\cdot f(a)$

[別解] $h=x-a$ とおいても解ける
分母単項式化

---

[503] $f(x)=\begin{cases}x-1 & (x\leqq-1)\\ ax^2+bx+c & (-1<x<1)\\ d-3x & (x\geqq1)\end{cases}$

[解1] 公式で微分

$f(x)$は微分可能 ⇒ (まず)連続

$\begin{cases}f(-1)=-2=a-b+c & \text{―①}\\ f(1)=d-3=a+b+c & \text{―②}\end{cases}$

代入　左右極限

$f(x)$は $x=\pm1$ で微分可能

$f'(x)=\begin{cases}1 & (x<-1)\\ 2ax+b & (-1<x<1)\\ -3 & (x>1)\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-1-0}f'(x)=\lim\limits_{x\to-1+0}f'(x)$ かつ $\lim\limits_{x\to1-0}f'(x)=\lim\limits_{x\to1+0}f'(x)$

$1=-2a+b$ ③　かつ　$2a+b=-3$ ④

①〜④より

$(a,b,c,d)=(-1,-1,-2,-1)$

[解2] 定義に戻る

③ $\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$x-1$　-2　ax^2+bx+c　$a-b+c$

$\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{a(x^2-1)+b(x+1)}{x+1}$

$1=-2a+b$ ―③

【質問対応】

497 $f(x)=\sqrt{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(\cancel{x}+h)-\cancel{x}}{h}\times\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n+a_{n+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\boxed{\sum_{k=1}^{n}k(a_k+a_{k+1})}}_{S_n\text{とおく}}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(a_k+a_{k+1})\text{とおく}$$

$$=1\times(a_1+a_2)+2(a_2+a_3)+3(a_3+a_4)$$

$$=\underline{a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-1)a_n}+n\,a_n$$

$$\sum ka_k+\sum \underset{\overset{\parallel}{(k+1)-1}}{k}a_{k+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot a_k+n\cdot a_n.$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n}a_k+n\,a_n.$$

より(与式)$=\lim_{n\to\infty}S_n$

$=$

$$\lim_{x\to a}\frac{a^2\cdot f(x)-x^2\cdot f(a)}{x-a}\leftarrow h=x-a$$

a:定数

変数 $x\to h$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\boxed{a^2}f(a+h)-(a+h)^2f(a)}{h}$$

$$(a^2+2ah+h^2)f(a)$$

$$=\lim_{h\to0}a^2\times\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\frac{\cancel{h}(2a+h)f(a)}{h}$$