zemik2020-09-04（board）

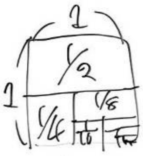
459 《補足》のつづき

(注) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \overset{偽}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束

の反例の一つに $a_n=\frac{1}{n}$ がある ← 分母が等差 → 調和

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ の証明

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\cdots \to 1$



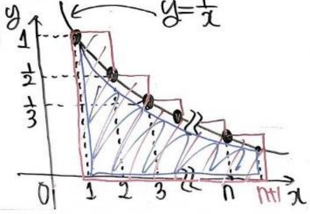
証1 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}+\cdots$

$> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}+\cdots$

$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots \to \infty$

追い出しの原理より $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\infty$

証2



$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > \int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}dx = \left[\log|x|\right]_{1}^{n+1} = \log(n+1)$ → ∞

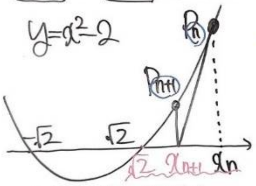
数列の和＝棒グラフの面積とみなして評価　ヨコ幅 1

(注) 区分求積法ではヨコ幅 $\frac{1}{n} \to 0$ $(n\to\infty)$

---

456 ← 454 の発展形

$y=x^2-2$



$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$

(Newton法　この問では$\sqrt{2}$の近似値が求まる)

Newton法

$P_n(x_n, x_n^2-2)$ とおく。

ただし $x_1>\sqrt{2}$

まず漸化式を立てる ($y'=2x$)

$y=x^2-2$ の P_n における接線は

$y-(x_n^2-2)=2x_n(x-x_n)$

∴ $y=2x_n\cdot x - x_n^2-2$

x軸との交点が $(x_{n+1}, 0)$

$x_{n+1}=\frac{x_n^2+2}{2x_n}$ ← 解けない

同一操作のくり返し ⇒ 漸化式

(1) n:自然数　$\sqrt{2}<x_{n+1}<x_n$ を証明

~~帰納法~~

x_{n+2}　x_{n+1}　x_n

(I) $x_n>\sqrt{2}$ を証明

(i) n=1のとき成立

(ii) n=kのとき: $x_k>\sqrt{2}$ を仮定する

$x_{k+1}=\frac{x_k^2+2}{2x_k}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{2}{x_k}\right)$

相加相乗

$\ge \frac{1}{2}\times 2\sqrt{x_k\times\frac{2}{x_k}}=\sqrt{2}$

等号 $x_k=\sqrt{2}$ は不成立

$x_{k+1}>\sqrt{2}$: n=k+1のときも成立

(II) $x_{n+1}<x_n$ を証明

$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n^2+2}{2x_n}-x_n$　差

$=\frac{x_n^2+2-2x_n^2}{2x_n}$

$=\frac{2-x_n^2}{2x_n}<0$ より

(グラフより明らか)

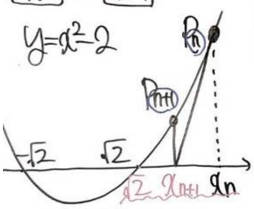
$x_{n+1}<x_n$

→(I)(II)より　全ての自然数nで $\sqrt{2}<x_{n+1}<x_n$ ■

---

456 ← 454

$y=x^2-2$



$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$

(Newton法　この問では$\sqrt{2}$の近似値が求まる)

(1)のまとめ　$P_n\left(x_n, \frac{x_n^2+2}{2x_n}\right)$

$x_{n+1}=\frac{x_n^2+2}{2x_n}$

(1)より $\sqrt{2}<x_{n+1}<x_n$

(2) $\lim_{n\to\infty}x_n=\boxed{?}$　(グラフより 答 $=\sqrt{2}$)

$x_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{x_n^2+2}{2x_n}-\sqrt{2}$

(n+1) 作る

$=\frac{x_n^2+2-2\sqrt{2}x_n}{2x_n}$

$=\frac{(x_n-\sqrt{2})^2}{2x_n}=\frac{x_n-\sqrt{2}}{2x_n}(x_n-\sqrt{2})$　(n)出現

$|x_{n+1}-\sqrt{2}|=\left|\frac{x_n-\sqrt{2}}{2x_n}\right|\cdot|x_n-\sqrt{2}|$

中身 $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{x_n}\right)$

(1)より $x_n>\sqrt{2}$

$\frac{1}{x_n}<\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0<\frac{\sqrt{2}}{x_n}<1$

$0<1-\frac{\sqrt{2}}{x_n}<1$

$\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{x_n}\right)<\frac{1}{2}$

∴ $|x_{n+1}-\sqrt{2}|<\frac{1}{2}|x_n-\sqrt{2}|$

くり返し用いると

$0\le|x_n-\sqrt{2}|<|x_1-\sqrt{2}|\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

極限をとると

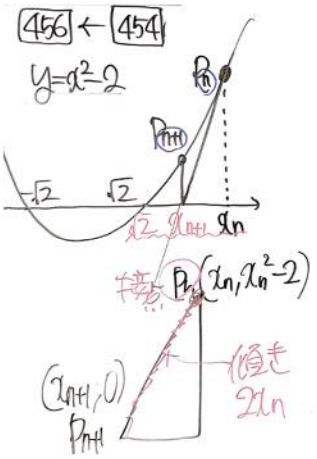
$0\le\lim_{n\to\infty}|x_n-\sqrt{2}|\le 0$

はさみうちの原理より

$\lim_{n\to\infty}|x_n-\sqrt{2}|=0$

∴ $\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$

$\boxed{456} \leftarrow \boxed{454}$



《補足》接線の傾きに着目

$$\frac{(x_n^2-2)-0}{x_n-x_{n+1}}=2x_n$$

$$\frac{x_n-x_{n+1}}{x_n^2-2}=\frac{1}{2x_n}$$

$$x_n-x_{n+1}=\frac{x_n^2-2}{2x_n}$$

$$\therefore x_{n+1}=\frac{x_n^2+2}{2x_n}$$

$\boxed{チャレ(50)} \leftarrow$ P.199 $\boxed{351}$ の類題　背景 Pell方程式

p, q：有理数，$\sqrt{q}$：無理数

$(p+\sqrt{q})^n = a_n + b_n\sqrt{q}$ ―― ①

$a_1=p,\ b_1=1$
漸化式（n乗，$n+1$乗を比較）
帰納法

(1) $(p-\sqrt{q})^n = a_n - b_n\sqrt{q}$ を示す ―― ②

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{q}$ を示す

①，②から a_n, b_n が求まる
和と差

$\boxed{添削例}$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}\cdot a+bx-cx^n}{1+3^{n-1}+x^{n-1}}\quad \frac{\infty}{\infty}$$

① 不定形ですか？（Yes or No）

② $f(-3)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}a-3b-c\cdot(-3)^n}{1+3^{n-1}+(-3)^{n-1}}$

これが 3に収束するなんてことがあるの？

① 3^n と x^n の比較
x と ±3 の大小で場合分け　(2)へ

② $f(-3)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a-\frac{3b}{3^{n-1}}+3c\cdot(-1)^{n-1}}{\frac{1}{3^{n-1}}+1+(-1)^{n-1}}$　収束せずに振動！

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a+(-3b)\times\frac{1}{3^{n-1}}+3c\times(-1)^{n-1}}{1+\frac{1}{3^{n-1}}+(-1)^{n-1}}=a=3$$

収束するためには
$a=-3b=3c$ が必要

$(a,b,c)=(3,-1,1)$

$\boxed{458}$ (1) $x>0$ のもとで $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ を証明
有理化

$\sqrt{x+1}>0$ より
$\sqrt{x+1}+\sqrt{x}>\sqrt{x}$　逆数をとって　$\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ■

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$　← (1)で $x=k$

無限級数

$$\geqq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\times\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}\triangle\sqrt{k})$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$$

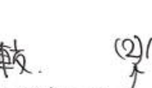
階差 → 具体化

追い出しの原理より
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\infty$

$\boxed{460}$ (1) $\dfrac{1}{n(n+1)(n+3)}=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}+\dfrac{c}{n+3}$　（恒等式だから係数比較でもよい）

分母はらって
$1=a(n+1)(n+3)+bn(n+3)+cn(n+1)$

分母が0
$\boxed{n\to0}$　$1=3a$
$\boxed{n\to-1}$　$1=-2b$
$\boxed{n\to-3}$　$1=6c$



$\therefore (a,b,c)=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right)$ (1)

(2) $\dfrac{1}{n(n+1)(n+3)}=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n+1}+\dfrac{1}{n+3}\right)$

~~階差~~

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)}=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{2\left(\frac{1}{k}\triangle\frac{1}{k+1}\right)-\left(\frac{1}{k+1}\triangle\frac{1}{k+3}\right)\right\}$$

2つの階差

差1

ここで $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\triangle\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\to1$
$(n\to\infty)$

また $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} \overset{差2}{-} \frac{1}{k+3}\right)$

$= \left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cdots$

$\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\cancel{\frac{1}{n+1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+3}\right)$

$= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3} \longrightarrow \frac{5}{6} \quad (n\to\infty)$ より

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{1}{6}\left(2\times 1-\frac{5}{6}\right) = \frac{7}{36}$

$\boxed{461}$ ← $\boxed{458}$ の類題

$\boxed{462}$ $\sum_{n=1}^{\infty} n\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} k\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

$\boxed{463}$ オススメ ⇨ (類題演習 次回以降)

$\boxed{464}$ 題意把握
いろいろ図を描く

($\boxed{\text{チャレ(58)}}$ 計算問題 オススメ
サボるかも…)

〜 472まで 予習

恒等式だから
係数比較
でもよい

~~階差~~

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{1}{k+3}\right)$

$= \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\underbrace{2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)}_{2つの階差}\right\}$

ここで 差1

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1} \longrightarrow 1$

$(n\to\infty)$

$\boxed{461}$ ← $\boxed{458}$ の類題

$\boxed{462}$ $\sum_{n=1}^{\infty} n\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} k\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

$\boxed{463}$ オススメ ⇨ (類題演習 次回以降)

$\boxed{464}$ 題意把握
いろいろ図を描く

($\boxed{\text{チャレ(58)}}$ 計算問題 オススメ
サボるかも…)

〜 472まで 予習