# YAWARAKA 先生のテキスト 解答 ③複素平面

## 標準問題

### 1

(2) $\left|\dfrac{z-2i}{1+2iz}\right|=1$ より　$\dfrac{|z-2i|}{|1+2iz|}=1$

よって　$|z-2i|=|1+2iz|$

両辺を平方して　$|z-2i|^2=|1+2iz|^2$

$(z-2i)\overline{(z-2i)}=(1+2iz)\overline{(1+2iz)}$

$(z-2i)(\overline{z}+2i)=(1+2iz)(1-2i\overline{z})$

$z\overline{z}+2iz-2i\overline{z}-4i^2=1-2i\overline{z}+2iz-4i^2z\overline{z}$

$|z|^2+4=1+4|z|^2$

$3|z|^2=3$　　$|z|^2=1$

$|z|\geqq 0$ であるから　$|z|=1$　㊡

### 2

解答　$|z|=\sqrt{5}$ より　$|z|^2=5$　　よって　$z\overline{z}=5$

これと，$z+\overline{z}=2$ より，$z$，$\overline{z}$ は 2 次方程式

$t^2-2t+5=0$ の 2 つの解であるから

$z=1\pm\sqrt{1-5}=\mathbf{1\pm 2i}$

### 3

解答　$z+\dfrac{4}{z}$ は実数であるから

$\overline{z+\dfrac{4}{z}}=z+\dfrac{4}{z}$　　$\overline{z}+\dfrac{4}{\overline{z}}=z+\dfrac{4}{z}$

両辺に $z\overline{z}$ を掛けて

$z(\overline{z})^2+4z=z^2\overline{z}+4\overline{z}$

$z\overline{z}(z-\overline{z})-4(z-\overline{z})=0$

$(z\overline{z}-4)(z-\overline{z})=0$

ゆえに　$z\overline{z}=4$ または $z=\overline{z}$

また，$|z-2|=2$ より　$|z-2|^2=4$

$(z-2)\overline{(z-2)}=4$　　$(z-2)(\overline{z}-2)=4$

$z\overline{z}-2z-2\overline{z}+4=4$

ゆえに　$z\overline{z}-2(z+\overline{z})=0$　…①

(i) $z\overline{z}=4$ のとき

①より，$z+\overline{z}=2$ となるから，$z$，$\overline{z}$ は 2 次方程式 $t^2-2t+4=0$ の 2 つの解である。

ゆえに　$z=1\pm\sqrt{3}i$

(ii) $z=\overline{z}$ のとき

①より　$z^2-4z=0$　　$z(z-4)=0$

ゆえに　$z=0,\ 4$　　$z\neq 0$ より　$z=4$

(i)，(ii)より　$\boldsymbol{z=4,\ 1\pm\sqrt{3}i}$

## 4

解答 $(1+\sqrt{3}i)(1+i)=1+i+\sqrt{3}i+\sqrt{3}i^2$

$=\boldsymbol{(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i}$ …①

また，極形式で積を計算すると

$(1+\sqrt{3}i)(1+i)$

$=2(\cos60°+i\sin60°)\cdot\sqrt{2}(\cos45°+i\sin45°)$

$=2\sqrt{2}(\cos105°+i\sin105°)$ …②

①，②の実部を比較して　$1-\sqrt{3}=2\sqrt{2}\cos105°$

よって　$\cos105°=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

## 5

解答 $z=\dfrac{2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)}=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

よって　$z^5=(\sqrt{3})^5\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^5=9\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)$

$=9\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=\boldsymbol{-\dfrac{27}{2}+\dfrac{9\sqrt{3}}{2}i}$ …答

## 6

(ア) $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$ の両辺に $z$ を掛けると　$z^2+1=\sqrt{2}z$　　$z^2-\sqrt{2}z+1=0$

ゆえに　$\boldsymbol{z=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}}$ …答

(イ) $z=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$ のとき　$z=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$

ゆえに　$z^{100}=\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^{100}=\left\{\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^4\right\}^{25}$

$=(\cos\pi+i\sin\pi)^{25}=(-1)^{25}=-1$

$z=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}$ のときも同様にして，$z^{100}=-1$ となる。

よって　$z^{100}+\dfrac{1}{z^{100}}=-1+\dfrac{1}{-1}=\boldsymbol{-2}$ …答

## 7

解答 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0)$ とおく。

$z^3=8i$ より　$r^3(\cos\theta+i\sin\theta)^3=8i$

ゆえに　$r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)=8\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

両辺の絶対値と偏角を比較して

$r^3=8$ …①

$3\theta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ ($k$ は整数) …②

$r>0$ であるから，①より　$r=2$

また，②より　$\theta=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k}{3}\pi$

ゆえに　$z=2\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k}{3}\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k}{3}\pi\right)\right\}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，$k=0,\ 1,\ 2$ であるから

$z=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right),\ 2\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right),$

$2\left(\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi\right)$

すなわち　$\boldsymbol{z=\sqrt{3}+i,\ -\sqrt{3}+i,\ -2i}$

## 8

**解答** (1) $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$=x^5+x^4+x^3+x^2+x-x^4-x^3-x^2-x-1=x^5-1$ 終

(2) $\alpha^5=\left(\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi\right)^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$

ゆえに，$\alpha$ は方程式 $x^5=1$ の解となる。$\alpha^5=1$ より　$\alpha^5-1=0$

(1)より　$(\alpha-1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$　　$\alpha\neq1$ であるから　$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha$

ゆえに，$\alpha$ は方程式 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ の解となる。終

また　$\frac{1}{\alpha}=\frac{\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}}=\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2}=\frac{\cos\frac{2}{5}\pi-i\sin\frac{2}{5}\pi}{\cos^2\frac{2}{5}\pi+\sin^2\frac{2}{5}\pi}=\boldsymbol{\cos\left(-\frac{2}{5}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{5}\pi\right)}$　…答

(3) (2)から　$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$

$\alpha\neq0$ であるから，両辺を $\alpha^2$ で割ると　$\alpha^2+\alpha+1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=0$

ゆえに　$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-1=0$　　$\beta=\alpha+\frac{1}{\alpha}$ より　$\beta^2+\beta-1=0$

よって，$\beta$ は方程式 $x^2+x-1=0$ の解となる。終

(2)より，$\beta=\alpha+\frac{1}{\alpha}=2\cos\frac{2}{5}\pi>0$ であるから

$2\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　ゆえに　$\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　終

## 9

**解答** $\gamma=\alpha+\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)(\beta-\alpha)$

$=(-1+2\sqrt{3}i)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\{(-2+\sqrt{3}i)-(-1+2\sqrt{3}i)\}$

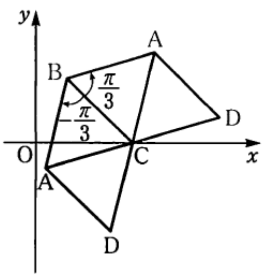
$=-1+2\sqrt{3}i+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(-1-\sqrt{3}i)=-1+2\sqrt{3}i-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i-\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}i^2$

$=\boldsymbol{-1+(2\sqrt{3}-2)i}$　…答

## 10

**解答** 以下，複号同順とする。

(1) 点Aは，点Cを点Bの周りに $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ 回転した点である。点Aを表す複素数は




$(1+2i)+\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}\{3-(1+2i)\}$

$=(1+2i)+\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2-2i)$

$=1+2i+1-i\pm\sqrt{3}i\mp\sqrt{3}i^2$

$=\boldsymbol{(2\pm\sqrt{3})+(1\pm\sqrt{3})i}$

(2) D$(\delta)$とする。

2本の対角線BD，ACの中点は一致するから

$\frac{(1+2i)+\delta}{2}=\frac{\{(2\pm\sqrt{3})+(1\pm\sqrt{3})i\}+3}{2}$

$1+2i+\delta=(5\pm\sqrt{3})+(1\pm\sqrt{3})i$

ゆえに　$\delta=\boldsymbol{(4\pm\sqrt{3})+(-1\pm\sqrt{3})i}$

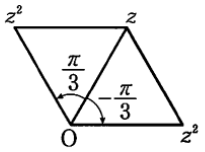
**別解** 点Dは，点Aを $3-(1+2i)=2-2i$ だけ平行移動した点であるから，Dを表す複素数は

$\{(2\pm\sqrt{3})+(1\pm\sqrt{3})i\}+(2-2i)$

$=\boldsymbol{(4\pm\sqrt{3})+(-1\pm\sqrt{3})i}$

## 11

**解答** (1) 3 点 0，$z$，$z^2$ を頂点とする三角形が正三角形となるから，点 $z^2$ は点 $z$ を点 O の周りに $\frac{\pi}{3}$ 回転または $-\frac{\pi}{3}$ 回転した点である。

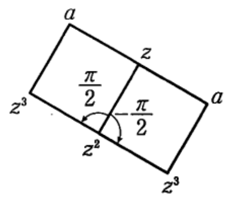



したがって　$z^2=\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}z=\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$　(複号同順)

$z\neq 0$ であるから　$\boldsymbol{z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i}$　…㊟

(2) この正方形の 2 本の対角線の中点は一致するから

$\frac{a+z^2}{2}=\frac{z+z^3}{2}$　　ゆえに　$a=z^3-z^2+z$　…①




また，$z^3$ が表す点は $z$ が表す点を $z^2$ が表す点の周りに $\frac{\pi}{2}$ または $-\frac{\pi}{2}$ 回転した点であるから，以下，複号同順として

$$z^3-z^2=\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right\}(z-z^2)$$

$$z^2(z-1)=\pm iz(1-z)$$

ここで，$z\neq z^2$，$z\neq z^3$，$z^2\neq z^3$ より　$z\neq 0,\ \pm 1$

ゆえに　$z=\mp i$　　$z^2=-1$，$z^3=\pm i$ で，①より $a=1$ であるから，

$a$，$z$，$z^2$，$z^3$ が表す 4 点は正方形の 4 頂点になっている。

よって，求める $a$ と $z$ の値は　$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{z=\pm i}$　…㊟

## 12

**解答** A$(\alpha)$，B$(\beta)$ はそれぞれ O(0) と異なる点であるから　$\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$

$\alpha^2-2\alpha\beta+4\beta^2=0$ の両辺を $\beta^2(\neq 0)$ で割ると

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-2\cdot\frac{\alpha}{\beta}+4=0$　　ゆえに　$\frac{\alpha}{\beta}=1\pm\sqrt{3}i$　…①

したがって，$\arg\frac{\alpha}{\beta}=\pm\frac{\pi}{3}$ (複号同順) であるから　$\boldsymbol{\angle \mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3}}$　…㊟

また，$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}=2$ であるから　$|\alpha|=2|\beta|$　…②

①より　$\alpha=(1\pm\sqrt{3}i)\beta$

これを $|\alpha-2\beta|=4$ に代入して　$|(-1\pm\sqrt{3}i)\beta|=4$

$|-1\pm\sqrt{3}i||\beta|=4$　　$2|\beta|=4$　　ゆえに　$|\beta|=2$

これを②に代入して　$|\alpha|=2\cdot 2=4$

したがって　$\mathrm{OA}=|\alpha|=4$，$\mathrm{OB}=|\beta|=2$

よって，三角形 AOB の面積は

$\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\angle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\sin\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{2\sqrt{3}}$　…㊟

## 13

**解答** $\frac{z^2-1}{z-1}=z+1=(1+2i)+1=2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

よって　$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{|z^2-1|}{|z-1|}=\left|\frac{z^2-1}{z-1}\right|=2\sqrt{2}$，$\arg\frac{z^2-1}{z-1}=\frac{\pi}{4}$　　ゆえに　$\boldsymbol{\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{4}}$　…㊟

また　$\mathrm{AB}=|z-1|=|(1+2i)-1|=|2i|=2$，$\mathrm{AC}=2\sqrt{2}\mathrm{AB}=4\sqrt{2}$

よって，三角形 ABC の面積は　$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{4}$　…㊟

## 14

**解答**　$2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma=0$ より　$(\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2)+(\beta^2-2\beta\alpha+\alpha^2)=0$

$(\gamma-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2=0$　　$(\gamma-\alpha)^2=-(\beta-\alpha)^2$

$\beta\neq\alpha$ より　$\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2=-1$　　ゆえに　$\boldsymbol{\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm i}$　…答

したがって　$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{|\gamma-\alpha|}{|\beta-\alpha|}=\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1$，$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\dfrac{\pi}{2}$

よって，$\triangle\mathrm{ABC}$ は **$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形**　…答

## 15

**解答**　(1)　3 点 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ が同一直線上にあるための必要十分条件は

$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=0$　または　$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pi$

したがって　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=r(\cos0+i\sin0)$

または　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=r(\cos\pi+i\sin\pi)$ ($r$ は正の実数)

すなわち　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=r$　または　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=-r$

よって，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は実数である。 終

(2)　3 個の複素数 $-1$，$iz$，$z^2$ が同一直線上にあるための条件は，

$\dfrac{z^2-(-1)}{iz-(-1)}$ が実数であることである。

ここで　$\dfrac{z^2-(-1)}{iz-(-1)}=\dfrac{z^2-i^2}{iz-i^2}=\dfrac{(z+i)(z-i)}{i(z-i)}$

$=\dfrac{z+i}{i}=\dfrac{(z+i)i}{i^2}=-iz+1$

$-iz+1$ が実数であるための条件は

$\overline{-iz+1}=-iz+1$　　$i\bar{z}+1=-iz+1$

ゆえに　$\bar{z}=-z$

よって，求める条件は，**$z$ が純虚数であること**である。 …答

## 16

**別解**　$|z+3-4i|=2$ より，点 $z$ は点 $\mathrm{C}(-3+4i)$ を中心とする半径 2 の円上にある。

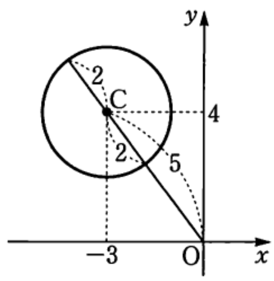
また，$|z|$ は原点と点 $z$ との距離である。

$|z|$ が最大になるのは，点 $\mathrm{P}(z)$ が原点 O と点 C を結んだ線分の延長上にあるときで，**最大値は**

$|-3+4i|+2=\sqrt{(-3)^2+4^2}+2=\boldsymbol{7}$

このとき，点 P は線分 OC を 7 : 2 に外分するから

$z=\dfrac{7}{5}(-3+4i)=-\dfrac{21}{5}+\dfrac{28}{5}i$




$|z|$ が最小になるのは，点 $\mathrm{P}(z)$ が原点 O と点 C を結んだ線分上にあるときで，**最小値は**

$|-3+4i|-2=\sqrt{(-3)^2+4^2}-2=\boldsymbol{3}$

このとき，点 P は線分 OC を 3 : 2 に内分するから

$z=\dfrac{3}{5}(-3+4i)=-\dfrac{9}{5}+\dfrac{12}{5}i$

# 17

**解答** $w=\dfrac{z+i}{z+1}$ より　$(z+1)w=z+i$　　$(w-1)z=-w+i$

$w\neq 1$ であるから　$z=\dfrac{-w+i}{w-1}$　…①

(1) $z$ は虚軸上を動くから　$\overline{z}=-z$　← $z$ は純虚数，または 0

①を代入して　$\overline{\left(\dfrac{-w+i}{w-1}\right)}=-\dfrac{-w+i}{w-1}$　　$\dfrac{-\overline{w}-i}{\overline{w}-1}=-\dfrac{-w+i}{w-1}$

$$(-\overline{w}-i)(w-1)=-(\overline{w}-1)(-w+i)$$

$$-w\overline{w}+\overline{w}-iw+i=w\overline{w}-i\overline{w}-w+i$$

$$2w\overline{w}-(1+i)\overline{w}-(1-i)w=0 \qquad w\overline{w}-\frac{1+i}{2}\overline{w}-\frac{1-i}{2}w=0$$

$$\left(w-\frac{1+i}{2}\right)\left(\overline{w}-\frac{1-i}{2}\right)=\frac{1+i}{2}\cdot\frac{1-i}{2} \qquad \left(w-\frac{1+i}{2}\right)\overline{\left(w-\frac{1+i}{2}\right)}=\frac{1}{2}$$

$$\left|w-\frac{1+i}{2}\right|^2=\frac{1}{2} \qquad \text{ゆえに} \quad \left|w-\frac{1+i}{2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって，求める軌跡は，**点 $\dfrac{1+i}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の円。** …㊫

(2) $z$ は原点を中心とする半径 1 の円周上を動くから　$|z|=1$

①を代入して　$\left|\dfrac{-w+i}{w-1}\right|=1$　　$|-w+i|=|w-1|$

ゆえに　$|w-i|=|w-1|$　← $|w-i|$，$|w-1|$ はそれぞれ 2 点 $w$，$i$ 間，$w$，1 間の距離

よって，求める軌跡は，2 点 1，$i$ から等距離にある点全体の集合，すなわち **2 点 1，$i$ を結んだ線分の垂直二等分線。** …㊫

# 18

**解答** (1) $zw=1$ より，$z=\dfrac{1}{w}$ であるから

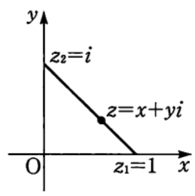
$$x+yi=\frac{1}{u+vi}=\frac{u-vi}{(u+vi)(u-vi)}=\frac{u-vi}{u^2+v^2}$$

$x$，$y$，$u$，$v$ は実数であるから

$$\boldsymbol{x=\frac{u}{u^2+v^2},\ \ y=-\frac{v}{u^2+v^2}} \quad \cdots㊫$$

(2) $z$ が点 $z_1=1$ と点 $z_2=i$ を結ぶ線分上を動くから

$y=-x+1$ $(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$




(1)の結果を代入すると

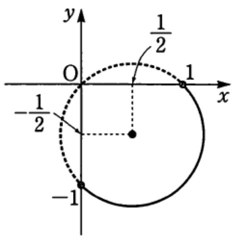
$$-\frac{v}{u^2+v^2}=-\frac{u}{u^2+v^2}+1$$

$$-v=-u+u^2+v^2$$

$$u^2+v^2-u+v=0$$

$$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

㊫




また，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ より　$\dfrac{u}{u^2+v^2}\geqq 0$，$-\dfrac{v}{u^2+v^2}\geqq 0$

$u^2+v^2>0$ であるから

$u\geqq 0$，$v\leqq 0$，$(u,\ v)\neq(0,\ 0)$

よって，$w$ が描く図形は，右の図のようになる。

**補足** (2)で $x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のかわりに $0\leqq x\leqq 1$ を用いると，$u$，$v$ についての不等式が複雑になる（円の周と外部を表す不等式が得られる）。

## 発展問題

【１】　$xy$ 平面上に 3 点 A $(-2a, 0)$，B $(2b, 0)$，C $(0, 2c)$ がある（ただし $a$，$b$，$c$ は正の実数）。線分 AB を斜辺とする直角二等辺三角形を三角形 ABC の外部にとり，その直角の頂点を D とする。同様に線分 BC，CA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形を三角形 ABC の外部にとり，その直角の頂点をそれぞれ E，F とする。以下の問に答えよ。

(1)　点 D，E，F それぞれの座標を $a$，$b$，$c$ を用いて表せ。

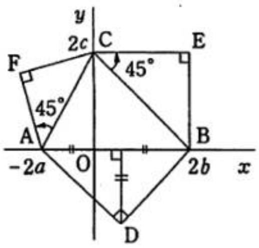
(2)　直線 CD と直線 EF が直交することを示せ。

(3)　線分 CD と線分 EF の長さが等しいことを示せ。

❷ (1) 右図から

$\mathrm{D}\left(\dfrac{-2a+2b}{2},\ -\dfrac{2b+2a}{2}\right)$

また，複素数平面上において E$(\alpha)$は，B を C のまわりに 45° 回転し，さらに C からの距離を $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍した点である．




$$\alpha-2ci=(2b-2ci)\times\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos45^\circ+i\sin45^\circ)$$

$$=(b-ci)(1+i)=b+c+(b-c)i$$

$$\therefore\ \alpha=b+c+(b+c)i$$

F$(\beta)$ として，同様に　$\beta+2a=(ci+a)(1+i)$

から　$\beta=-a-c+(a+c)i$

求める座標は　$\left.\begin{array}{l}\mathrm{D}(-a+b,\ -a-b)\\ \mathrm{E}(b+c,\ b+c),\ \mathrm{F}(-c-a,\ c+a)\end{array}\right\}$　………〔答〕

(2)　$\gamma=2ci$，$\delta=-a+b-(a+b)i$ とおくと

$$\frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}=\frac{-a+b-(a+b+2c)i}{-a-b-2c+(a-b)i}=i$$

よって，$\arg\dfrac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}=90^\circ$ で，CD と EF は直交する．

(3)　$\left|\dfrac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}\right|=1$ すなわち $\dfrac{|\delta-\gamma|}{|\beta-\alpha|}=\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{EF}}=1$

【２】　複素数平面上で，方程式 $(1-2i)z+(1+2i)\bar{z}=20$ の表す直線を $l$ とする。点 $z=x+iy$（$x$，$y$ は実数）が $l$ 上にあるとき，$y$ を $x$ で表せば $y=$ $\boxed{(カ)}$ である。原点を中心とする円が直線 $l$ と点 $\alpha$ で接しているならば，$\alpha$ の表す複素数は，$\alpha=$ $\boxed{(キ)}$ である。また，このとき 2 次方程式 $x^2+px+q=0$（$p$，$q$ は実数）が $\alpha$ を 1 つの解としてもつならば，$p=$ $\boxed{(ク)}$，$q=$ $\boxed{(ケ)}$ である。

(3)　$l:(1-2i)z+\overline{(1-2i)}\bar{z}=20$

$z=x+yi$（$x$，$y$ は実数）を代入すると

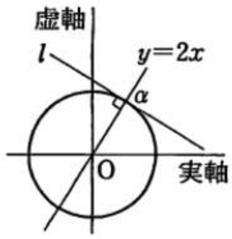
$$(x+2y)\times2=20$$

$$\therefore\quad y=-\frac{1}{2}x+5$$

これと $y=2x$ を連立させて

$$x=2,\ y=4$$

すなわち　$\alpha=2+4i$




実数係数の 2 次方程式が $\alpha$ を解にもつとき，$\bar{\alpha}$ もまた解であるから

$$p=-(\alpha+\bar{\alpha})=-4,\ q=\alpha\cdot\bar{\alpha}=20$$

**【３】**　$\alpha=1+2i$，$\beta=\dfrac{-1+i}{2}$，$\gamma=\dfrac{\alpha}{\beta}$とし，複素数平面において，３点$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$を通る円を$D$とする。

(1)　円$D$の中心と半径を求めよ。

(2)　点$P(z)$が円$D$の周上を動くとき，$|z|$の最大値を求めよ。

❷ (1)　$\gamma=\dfrac{\alpha}{\beta}=(1+2i)\div\dfrac{-1+i}{2}=1-3i$

より $\mathrm{A}(1,\ 2)$，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{C}(1,\ -3)$ とする．円$D$の方程式を　$x^2+y^2+ax+by+c=0$

とおく．円$D$が3点A，B，Cを通ることから

$$\begin{cases} a+2b+c=-5 \\ a-b-2c=1 \\ a-3b+c=-10 \end{cases}\quad \therefore\quad a=-4,\ b=1,\ c=-3$$

これから円$D$の方程式は

$$x^2+y^2-4x+y-3=0$$

$$(x-2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{29}{4}$$

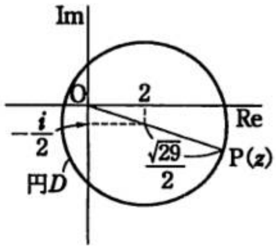
$\therefore$　中心 $2-\dfrac{1}{2}i$，半径 $\dfrac{\sqrt{29}}{2}$　………〔答〕

(2)　原点をOとするとき，線分OPが円$D$の中心を通るとき，$|z|$は最大となる。

$|z|$の最大値

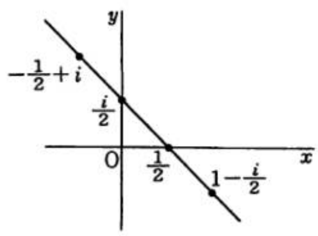
$$=\sqrt{4+\frac{1}{4}}+\frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{17}+\sqrt{29}}{2}$$　………〔答〕




**【４】**　複素数平面上で，点$z$が２点$1-\dfrac{i}{2}$，$-\dfrac{1}{2}+i$を通る直線上を動くとき，$\dfrac{1}{z}$はどのような図形をえがくか。

❷　複素数平面上で，2点 $1-\dfrac{i}{2}$，$-\dfrac{1}{2}+i$ を通る直線は，右の図のような直線で2点 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{i}{2}$ を通る直線である．




この直線上の点$z$を $x+yi$ ($x$，$y$ は実数) とすると

$$z=x+yi,\quad x+y=\frac{1}{2}$$

$$w=\frac{1}{z}=u+vi\ (u,\ v\ は実数)$$

とすると

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+yi}$$

であるから

$$x+yi=\frac{1}{w}=\frac{1}{u+vi}=\frac{u-vi}{u^2+v^2}$$

したがって

$$x=\frac{u}{u^2+v^2},\quad y=-\frac{v}{u^2+v^2}$$

これと $x+y=\dfrac{1}{2}$ より

$$\frac{u-v}{u^2+v^2}=\frac{1}{2}\iff u^2+v^2-2u+2v=0$$

となるから

$$(u-1)^2+(v+1)^2=2$$

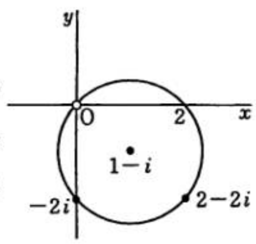
したがって

$$|(u-1)+(v+1)i|=|w-(1-i)|=\sqrt{2}$$

ただし，$u^2+v^2\neq 0$ より

$$(u,\ v)\neq(0,\ 0)$$

すなわち，$w=\dfrac{1}{z}=u+vi$ のえがく図形は，点 $1-i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円である．ただし，点Oを除く．



【５】 複素平面上に 3 点$z$，$z^2$，$z^3$がこの順に時計回りに位置し，正三角形の 3 頂点をなすとき，

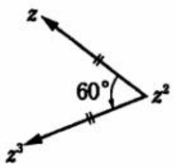
$z=\dfrac{-\boxed{\text{ア}}-\sqrt{\boxed{\text{イ}}}\,i}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。また，この三角形の三辺の長さの和は，$\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である。

解説 (1) 複素数平面上で反時計回りに 60° 回すには

$\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を

かければよい．$z-z^2$ を 60° 回すと $z^3-z^2$ になることから

$$z^3-z^2=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z-z^2)$$




$z$，$z^2$，$z^3$ は異なることから $z\neq 0,\ 1$

よって，上の式を $z^2-z$ で割って，

$$z=-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

一辺の長さは $|z-z^2|=|z(1-z)|=|z||1-z|$

$$=\left|\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right|\left|\frac{3+\sqrt{3}\,i}{2}\right|=\sqrt{3}$$

辺は 3 本あるので，$3\sqrt{3}$

【６】複素数平面において，3 つの複素数

$z_1=1+i$，$z_2=-1+3i$，$z_3=2+2i$

が表す点をそれぞれ，A，B，C とするとき，3 点 A，B，C を頂点とする平行四辺形の残りの頂点 P を表す複素数を求めると，$\boxed{\text{ア}}$となる。さらに，頂点 P を表す複素数を極形式$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$の形(ただし，$r>0$，$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$)で表すと，$\boxed{\text{イ}}$となる。

❻ 〔答〕 ア 4，$4i$，$-2+2i$

イ $4(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)$，$4(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)$

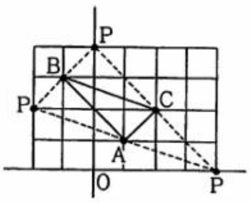
$2\sqrt{2}(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)$

解説 ア，イ (i) 平行四辺形の頂点が CBAP の順のとき，

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}$ より

$(1+i)+\{(2+2i)-(-1+3i)\}$

$=4=4(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)$




(ii) 頂点が BACP の順のとき，

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AB}$ より

$(2+2i)+\{(-1+3i)-(1+i)\}$

$=4i=4(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)$

(iii) 頂点が ACBP の順のとき，

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CA}$ より

$(-1+3i)+\{(1+i)-(2+2i)\}$

$=-2+2i=2\sqrt{2}(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)$

【７】複素数平面上の点 $P_n(z_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が関係式

$$z_{n+1}=7+i+iz_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって与えられている。

$z_{n+1}=7+i+iz_n$ を変形すると

$$z_{n+1}-\boxed{\text{(キ)}}=i(z_n-\boxed{\text{(キ)}})$$

となるから，点 $P_n(z_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ のうち異なるものは有限個であり，その個数を $m$ とすると，

（ i ）　$z_1=\boxed{\text{(キ)}}$ のとき　$m=\boxed{\text{(ク)}}$

（ ii ）　$z_1\neq\boxed{\text{(キ)}}$ のとき　$m=\boxed{\text{(ケ)}}$

であることがわかる。

（ ii ）のとき，異なる $\boxed{\text{(ケ)}}$ 個の点は同一円周上にある。その円の半径が 2 であるとき，$|z_1|$ が最大となるような $z_1$ は $z_1=\boxed{\text{(コ)}}$ である。

(3)　$z_{n+1}=7+i+iz_n$

$x=7+i+ix$ のとき

$$x=\frac{7+i}{1-i}=\frac{(7+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{6+8i}{2}=3+4i$$

だから，$z_{n+1}-(3+4i)=i\{z_n-(3+4i)\}$

よって，$\{z_n-(3+4i)\}$ は初項 $z_1-(3+4i)$，公比 $i$ の等比数列だから，$z_n-(3+4i)=i^{n-1}\{z_1-(3+4i)\}$

(i)　$z_1=3+4i$ のとき，

$$z_n-(3+4i)=0 \qquad \therefore\ z_n=3+4i$$

$z_n$ は一定だから，$z_n$ の異なるものは 1 個である．

(ii)　$z_1\neq3+4i$ のとき，

$$z_n-(3+4i)=i^{n-1}\{z_1-(3+4i)\}$$

$$\therefore\ z_n=\{z_1-(3+4i)\}i^{n-1}+3+4i$$

ここで，$i^{n-1}=1,\ i,\ -1,\ -i$ であり，$i^{n-1}$ は異なる 4 個の値をとるから，$z_n$ の異なるものは 4 個である．

また，

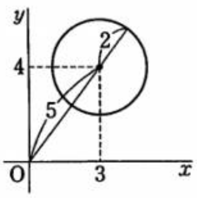
$$\begin{aligned}|z_n-(3+4i)|&=|i^{n-1}\{z_1-(3+4i)\}|\\&=|i|^{n-1}|z_1-(3+4i)|\\&=|z_1-(3+4i)|\end{aligned}$$

よって，$z_n$ は $3+4i$ を中心とする半径 $|z_1-(3+4i)|$ の円周上にある．

円の半径が 2 のとき

$$|z_1-(3+4i)|=2$$

よって，$z_1$ は $3+4i$ を中心とする半径 2 の円周上にあるから，右の図により，原点O，$3+4i$，$z_1$ が一直線上にあり，$z_1$ が $3+4i$ に対し，原点と反対側にあるとき $|z_1|$ は最大となる．




$|3+4i|=5$，$|z_1-(3+4i)|=2$ だから，

$$z_1=\frac{7}{5}(3+4i)=\frac{21}{5}+\frac{28}{5}i$$

【８】複素数平面上で，$z_0=0$ が表す点を $P_0$，$z_1=2+4i$ が表す点を $P_1$ とする。いま線分 $P_0P_1$ の中点を $Q_1$ とし，点 $P_1$ を中心に点 $Q_1$ を $90°$ 回転した点を $P_2(z_2)$ とする。$P_2$ を表す複素数 $z_2$ を求めると $z_2=\boxed{\ (3)\ }$ である。さらに線分 $P_1P_2$ の中点を $Q_2$ とし，点 $P_2$ を中心に $Q_2$ を $90°$ 回転した点を $P_3(z_3)$ とする。この操作を続け，線分 $P_{n-1}P_n$ の中点を $Q_n$ とし，$P_n$ を中心に $Q_n$ を $90°$ 回転した点を $P_{n+1}(z_{n+1})$ とする。このとき，複素数 $2^{100}(z_{100}-z_{99})$ の値を求めると $\boxed{\ (4)\ }$ である。

(2) 点 $P_2(z_2)$ は，点 $P_1(z_1)$ を中心に点 $Q\left(\frac{z_1}{2}\right)$ を $90°$ 回転した点であるから

$$z_2-z_1=i\left(\frac{z_1}{2}-z_1\right)$$

$z_1=2+4i$ より

$$z_2=z_1-\frac{z_1}{2}i=4+3i$$

点 $P_{n+1}(z_{n+1})$ は，点 $P_n(z_n)$ を中心に点 $Q_n\left(\frac{z_n+z_{n-1}}{2}\right)$ を $90°$ 回転した点であるから

$$z_{n+1}-z_n=i\left(\frac{z_n+z_{n-1}}{2}-z_n\right)$$

$$z_{n+1}-z_n=-\frac{i}{2}(z_n-z_{n-1})$$

数列 $\{z_{n+1}-z_n\}$ は初項 $z_1-z_0=2+4i$，公比 $-\frac{i}{2}$ の等比数列であるから

$$z_{n+1}-z_n=(2+4i)\left(-\frac{i}{2}\right)^n$$

$n=99$ とすると

$$z_{100}-z_{99}=(2+4i)\left(-\frac{i}{2}\right)^{99}$$

$$2^{100}(z_{100}-z_{99})=-2(2+4i)i^{99}$$
$$=-8+4i$$

【９】 複素数平面上の原点Oと３点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(2+i)$ を頂点とする四角形OABCが長方形で，$OA:OC=2:1$ であるとする。複素数 $\alpha$ の実部が正であるとき，$\alpha=\boxed{\ (3)\ }$ であり，複素数 $\beta$ の偏角を $\theta$ とすると $\sin\theta=\boxed{\ (4)\ }$ である。

(2) OC を原点のまわりに $-90°$ 回転して２倍すると OA になるから

$$\alpha=2(2+i)\{(\cos(-90°)+i\sin(-90°)\}$$
$$=2(2+i)(-i)=2-4i$$

四角形 OABC は長方形だから対角線の中点は一致する。

よって $\dfrac{0+\beta}{2}=\dfrac{(2-4i)+(2+i)}{2}$

$$\beta=4-3i=5\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i\right)$$
$$=5(\cos\theta+i\sin\theta)\quad よって\quad \sin\theta=-\frac{3}{5}$$

【１０】$a$，$b$，$c$ を複素数とする３次方程式 $z^3+az^2+bz+c=0$ の３つの解が，複素数平面上でちょうど正三角形 $K$ の３つの頂点になっているとする。$K$ の重心を $m$ とするとき，次の問いに答えよ。

問１　$a$，$b$ を $m$ で表せ。

問２　$K$ の２つの頂点がちょうど実軸上にあるとき，$c$ を $m$ で表せ。

問３　$K$ の外接円の半径を $r$ とする。$|a|<2$，$|c|>2$ のとき，$r>1$ であることを示せ。

問１　$a=-3m$，$b=3m^2$　　問２　$c=-(m-\overline{m})-m^3$　　問３　(省略)

【１１】複素数平面上に，原点Oと３点$\alpha$，$\beta$，$\gamma$がある。$\alpha=2+i$，$\angle\alpha\mathrm{O}\beta=45^\circ$，$\angle\mathrm{O}\alpha\beta=60^\circ$，$\angle\alpha\mathrm{O}\gamma=90^\circ$，$|\alpha|=|\gamma|$であり，$\beta$と$\gamma$の虚部はともに正である。

このとき，$\gamma=$ $\boxed{\text{(エ)}}$，また$|\beta|$は$|\alpha|$の$\boxed{\text{(オ)}}$倍で，$\beta=$ $\boxed{\text{(カ)}}$である。さらに，複素数$w$が線分O$\gamma$上にあり，四角形O$\alpha\beta w$がある円に内接しているとき，$|w|$の値は$\boxed{\text{(キ)}}$である。

(2) $\gamma$ は，$\alpha$ をOのまわりに $90^\circ$ 回転した点である．

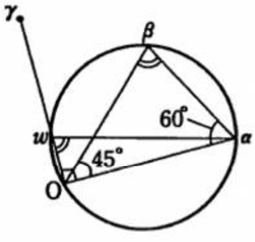
$$\gamma=\alpha(\cos90^\circ+i\sin90^\circ)$$
$$=(2+i)\cdot i=-1+2i$$

$\triangle\mathrm{O}\alpha\beta$ に正弦定理を用いて

$$\frac{|\beta|}{\sin60^\circ}=\frac{|\alpha|}{\sin75^\circ}$$

から $|\beta|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}|\alpha|$

$$=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}|\alpha|$$




$$\therefore\ \beta=\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{2}\alpha(\cos45^\circ+i\sin45^\circ)$$
$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}(2+i)(1+i)=\frac{3-\sqrt{3}}{2}(1+3i)$$

また，$\angle\alpha\mathrm{O}w=90^\circ$ だから，直角三角形 $\mathrm{O}\alpha w$ において　$|w|=|\alpha|\tan15^\circ=\sqrt{5}(2-\sqrt{3})$

**解答** (1) ○

$\alpha^2=\beta^2$ ならば　$\alpha^2-\beta^2=0$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=0$

よって　$\alpha-\beta=0$ または $\alpha+\beta=0$

すなわち　$\alpha=\beta$ または $\alpha=-\beta$　㊇

(2) ○

$\alpha^2=\beta^2$ ならば，(1)より　$\alpha=\beta$ または $\alpha=-\beta$

$\alpha=\beta$ のとき　$|\alpha|=|\beta|$　…①

$\alpha=-\beta$ のとき　$|\alpha|=|-\beta|$

$|-\beta|=|\beta|$ であるから　$|\alpha|=|\beta|$　…②

①，②より　$|\alpha|=|\beta|$　㊇

(3) ×（反例）$\alpha=1$，$\beta=i$

(4) ×（反例）$\alpha=1$，$\beta=i$

(5) ○

$|\alpha|\geqq0$，$|\beta|\geqq0$ であるから　$|\alpha|+|\beta|\geqq0$

等号は $|\alpha|=|\beta|=0$，すなわち $\alpha=\beta=0$ のときに成り立つ。

よって，$|\alpha|+|\beta|=0$ ならば　$\alpha=\beta=0$　㊇