zemik2020-09-17（board）

511 (1) $\begin{cases} x=1-\cos\theta \\ y=\theta-\sin\theta \end{cases}$ タテ型! cycloid

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

パラビ

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\cancel{\dfrac{\frac{d^2y}{d\theta^2}}{\frac{d^2x}{d\theta^2}}}$

$\left(\dfrac{3}{\theta}\right)'=\dfrac{3'\theta-3\theta'}{\theta^2}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$

D.I.Y. $=\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\times\dfrac{d\theta}{dx}$

θの式はθで微　調整

ここで $\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{1}{\sin\theta}$

また $\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$ 商ビ

$=\dfrac{\sin\theta\times\sin\theta-(1-\cos\theta)\times\cos\theta}{(\sin\theta)^2}$

$=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}$　$1-\cos^2\theta$

$=\dfrac{1}{1+\cos\theta}$ より $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$

(2) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を y で表す。

x で微分 $\dfrac{2x}{4}-\dfrac{1}{9}\times2y\dfrac{dy}{dx}=0$ より

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{9x}{4y}$　$9x^2-4y^2=36$

よって $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{9}{4}\times\left(\dfrac{1\times y-x\times\boxed{\frac{dy}{dx}}}{y^2}\right)$

$=\dfrac{9}{4}\times\dfrac{4y^2-9\boxed{x^2}}{4y^3}$

$=\dfrac{9\times(-36)}{4\times4y^3}=-\dfrac{81}{4y^3}$

512 抽象関数のトレーニング

$f''(x)=-2f'(x)-2f(x)$ を示す

1) $F(x)=e^x\cdot f(x)$ とおくと $F''(x)=-F(x)$

$F'(x)=e^x\cdot f(x)+e^x f'(x)$

$F''(x)=(e^x f(x)+e^x f'(x))+(e^x f'(x)+e^x f''(x))$

$=e^x\left(f(x)+2f'(x)+\boxed{f''(x)}\right)$

$=-e^x\cdot f(x)$

$=F(x)$ ■

(2) $F''(x)=-F(x)$ をみたす $F(x)$ は　(1)と同じもの

$\{F'(x)\}^2+\{F(x)\}^2$ が定数である

ことを示す。⇨ 微分するとゼロ

$G(x)=\{F'(x)\}^2+\{F(x)\}^2$ とおく

$G'(x)=2F'(x)F''(x)+2F(x)F'(x)$

$=2F'(x)\times\{\underbrace{F''(x)+F(x)}_{0}\}$

$=0$ より

$G(x)$ は定数 ■

よって $\{F'(x)\}^2+\{F(x)\}^2=C$

($C\geqq0$ の定数) と表せる

$\{F(x)\}^2\leqq C$　$|F(x)|\leqq\sqrt{C}$　$e^x\cdot f(x)$

$0\leqq|f(x)|\leqq\dfrac{\sqrt{C}}{e^x}$

極限をとると $0\leqq\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|\leqq0$

はさみうちの原理より $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ ■

65講

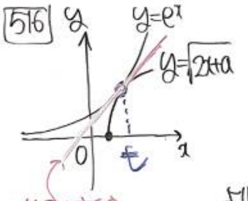
513 $\begin{cases} y=-\sqrt{3}x+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi+\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{\sqrt{3}\pi}{18}+\dfrac{1}{2} \end{cases}$

514 (1) 陰 $y=\dfrac{8}{3}x-\dfrac{7}{3},\ y=-\dfrac{3}{8}x+\dfrac{15}{4}$

だ円 (2) パラ $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ y=3x-\sqrt{3}$

515 曲線外からひいた接線　$y=\dfrac{1}{e^2}x$　接点を文字でおく。

516



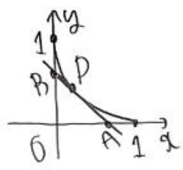
$f(x)=e^x,\ g(x)=\sqrt{2x+a}$ とおく

接点の x 座標を t とおくと

$\begin{cases} f(t)=g(t) \leftarrow y座 \\ f'(t)=g'(t) \leftarrow 傾き \end{cases}$

より $t=0,\ a=1$

517 $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=1 \leftarrow$ asteroid 星芒形



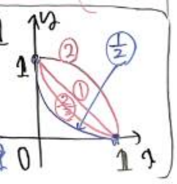
$x^n+y^n=1$

② 円

① 直線

$\frac{2}{3}$ asteroid

$\frac{1}{2}$ 放物線



$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ の両辺を x で微分

$\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\times\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{3}}=-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

接点を $P(p,q)$ とおくと接線は　$p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}}=1$

$y-q=-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{\frac{1}{3}}(x-p)$

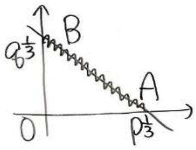
$y=-\dfrac{q^{\frac{1}{3}}}{p^{\frac{1}{3}}}x+\boxed{p^{\frac{2}{3}}q^{\frac{1}{3}}+q}$

$=q^{\frac{1}{3}}\underbrace{(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})}_{1}$

$\therefore y=-\dfrac{q^{\frac{1}{3}}}{p^{\frac{1}{3}}}x+q^{\frac{1}{3}}$

x軸との交点 A$(p^{\frac{1}{3}}, 0)$ ※← y=0

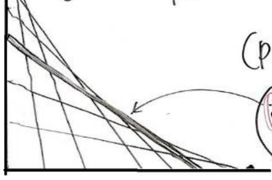
y軸との交点 B$(0, q^{\frac{1}{3}})$ ※← x=0



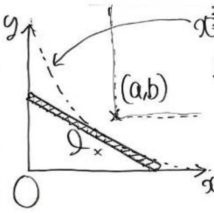
$AB=\sqrt{(p^{\frac{1}{3}})^2+(q^{\frac{1}{3}})^2}$

$=\sqrt{p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}}}=1$

(p,q)によらず一定



(通過領域の境界は asteroid)

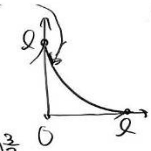


$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$

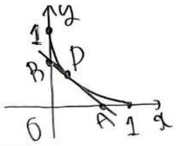
lの最大値は

$l^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$

∴ $l=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$



5(7) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=1$ ← asteroid (星芒形)



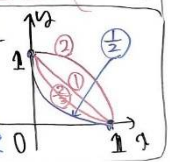
$x^n+y^n=1$

② 円

① 直線

$\frac{2}{3}$ asteroid

$\frac{1}{2}$ 放物線



$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ の両辺をxで微分

$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\times\frac{dy}{dx}=0$

∴ $\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{3}}=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

接点をP(p,q)とおくと接線は ($p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}}=1$)

$y-q=-\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{3}}(x-p)$

$y=-\frac{q^{\frac{1}{3}}}{p^{\frac{1}{3}}}x+\boxed{p^{\frac{2}{3}}q^{\frac{1}{3}}+q}$

$= q^{\frac{1}{3}}\boxed{(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})}$ = 1

∴ $y=-\frac{q^{\frac{1}{3}}}{p^{\frac{1}{3}}}x+q^{\frac{1}{3}}$ ※

[別解] アスパラ利用

陰 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 代入検

パラ $\begin{cases}x=\cos^3\theta\\ y=\sin^3\theta\end{cases}$ と表せる

接点 P$(\cos^3\theta, \sin^3\theta)$とおく (p,q) $p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}}=1$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{3\sin^2\theta\cos\theta}{-3\cos^2\theta\sin\theta}$

$=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

接線は

$y-\sin^3\theta=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(x-\cos^3\theta)$

∴ $y=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}x+\underbrace{\sin\theta\cos^2\theta+\sin^3\theta}$

$\sin\theta(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{1})$

$y=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}x+\sin\theta$

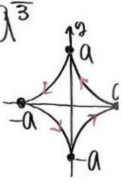
A$(\cos\theta, 0)$, B$(0, \sin\theta)$

$AB=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$ より一定

asteroid ①アスパラ

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

① $\begin{cases}x=a\cos^3\theta\\ y=a\sin^3\theta\end{cases}$



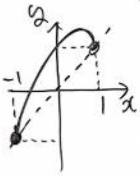
② x軸, y軸, 原点対称

③ 4:1 内サイクロイド

$\left\{\underbrace{\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}}_{\cos\theta}\right\}^2+\left\{\underbrace{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}}_{\sin\theta}\right\}^2=1$

Quiz

閉区間で連続だが、その端点で微分可能でないような具体的な関数を挙げよ。

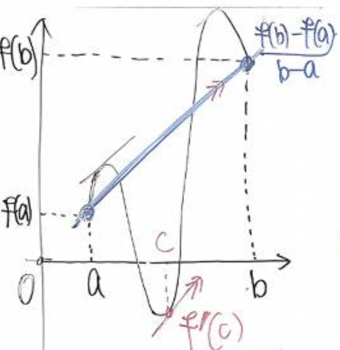


$f(x)=\sqrt{x}$ $(x\geq 0)$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$

$f(x)=\sqrt{1-x^2}+x$ $(-1\leq x\leq 1)$

$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+1$ $(-1<x<1)$



5(8) p.282 [3]

平均値の定理 前提条件

f(x)が a≦x≦bで連続、a<x<bで微分可能

⇒ $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ (a<c<b) 平均変化率

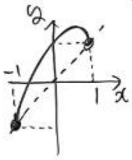
となるcが少なくとも1つ存在。

閉区間 [a,b] : a≦x≦b のこと

開区間 (a,b) : a<x<b のこと

Quiz

閉区間で連続だが
その端点で微分可能でない
ような具体的な関数を
挙げよ。

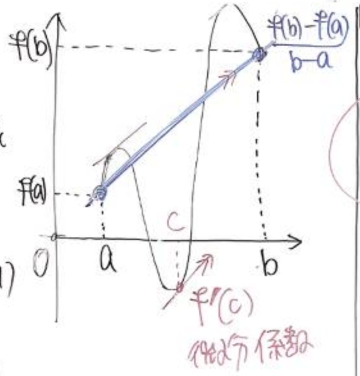


$f(x)=\sqrt{x}\ (x\geqq 0)$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ (x>0)$

$f(x)=\sqrt{1-x^2}+x\ (-1\leqq x\leqq 1)$

$f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+1\ (-1<x<1)$



518 (1) $f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

(2) (i) $\alpha=\beta$ のとき 両辺0より成立

(ii) $\alpha\neq\beta$ のとき 平均値の定理より

$$\frac{e^\beta\sin\beta-e^\alpha\sin\alpha}{\beta-\alpha}=\sqrt{2}e^c\sin\left(c+\frac{\pi}{4}\right)$$

$(\alpha<c<\beta)$ となるc が存在.

$e^c<e^\beta$, $\left|\sin\left(c+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqq 1$ より

$$|e^\beta\sin\beta-e^\alpha\sin\alpha|=\sqrt{2}(\beta-\alpha)\times e^c\left|\sin\left(c+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\leqq\sqrt{2}(\beta-\alpha)\cdot e^\beta$$

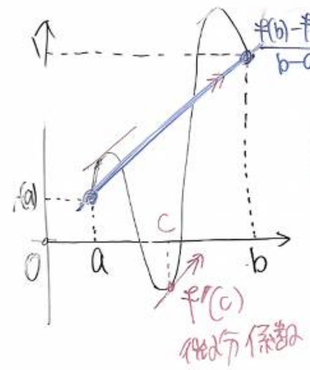
520 解けない漸化式の極限
+ 平均値の定理

→ チャレ(65) はその類題

527 通過領域

(逆手法, FAXの原理, 包絡線)

$(-1<x<1)$



518 (1) $f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

(2) (i) $\alpha=\beta$ のとき 両辺0より成立

(ii) $\alpha\neq\beta$ のとき 平均値の定理より

$$\frac{e^\beta\sin\beta-e^\alpha\sin\alpha}{\beta-\alpha}=\sqrt{2}e^c\sin\left(c+\frac{\pi}{4}\right)$$

$(\alpha<c<\beta)$ となるc が存在.

$e^c<e^\beta$, $\left|\sin\left(c+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqq 1$ より

$$|e^\beta\sin\beta-e^\alpha\sin\alpha|=\sqrt{2}(\beta-\alpha)\times e^c\left|\sin\left(c+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\leqq\sqrt{2}(\beta-\alpha)\cdot e^\beta$$