[550] 全実数 x で $x^{\sqrt{a}} \leqq a^{\sqrt{x}}$ が成立 範囲は？

するような 正の実数 a の値を求める

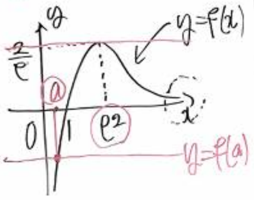
バラ^2 → まとめたい

$\sqrt{a}\log x \leqq \sqrt{x}\cdot\log a$

曲線 $\underbrace{\boxed{\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}}}_{y} \leqq \underbrace{\boxed{\dfrac{\log a}{\sqrt{a}}}}_{y}$ ヨコ棒

$f(x)=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ とおく

$f'(x)=\cdots\cdots=\dfrac{2-\log x}{2x\sqrt{x}}$



答 $a=e^2$

[547] (3)

マクローリン展開 の復習

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+\cdots\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots\cdots$

④ $f(x)=\log(1+x)$ $\{f^{(n)}(x)\}$: $\log(1+x)$, $\dfrac{1}{1+x}$, $-\dfrac{1}{(1+x)^2}$, $+\dfrac{2}{(1+x)^3}$, $-\dfrac{6}{(1+x)^4}$, $+\dfrac{24}{(1+x)}$

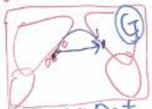
$\{f^{(n)}(0)\}$: $0, 1, -1, +2, -6, +24, -120, +720$

$\log(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{2!}{3!}x^3-\dfrac{3!}{4!}x^4+\dfrac{4!}{5!}x^5-\dfrac{5!}{6!}x^6$

$\therefore \log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^6}{6}+\cdots$ 蘭

$x=1$ 代入 $\log 2=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\cdots\cdots$

メルカトル 級数



メルカトル図法

[551] $x>0$, n:自然数

$1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}>\left(1-\dfrac{x^n}{n!}\right)e^x$

《考察》 背景 e^x のマクローリン展開

$F_n(x)=\underbrace{\boxed{1+\dfrac{x^1}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^{n-2}}{(n-2)!}}}_{F_{n-1}(x)}+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ n 項の和

とおくと $\begin{cases} F_n(x)=F_{n-1}(x)+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{①} \\ F_n'(x)=F_{n-1}(x) & \text{②} \end{cases}$

[証1] 数学的帰納法 ⇒ 漸化式

$f_n(x)=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}-\left(1-\dfrac{x^n}{n!}\right)e^x$ とおく　$f_{n-1}(x)=\boxed{F_{n-1}(x)}-\left(1-\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^x$

$=F_n(x)-\left(1-\dfrac{x^n}{n!}\right)e^x$

$f_n'(x)=F_n'(x)-\left\{-\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\times e^x+\left(1-\dfrac{x^n}{n!}\right)e^x\right\}$

$\quad // =F_{n-1}(x)+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^x-\left(1-\dfrac{x^n}{n!}\right)e^x$

$\quad // =f_{n-1}(x)+\left(1-\cancel{\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}}\right)e^x+\cancel{\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^x}-\left(1-\dfrac{x^n}{n!}\right)e^x$

$f_n'(x)=f_{n-1}(x)+\dfrac{x^n}{n!}e^x$ —(*)

$\left[f_{k+1}'(x)=f_k(x)+\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}e^x\right]$

あとは

(i) $n=1$

(ii) $n=k$ $f_k(x)>0$

$n=k+1$ $f_{k+1}'(x)>0$

より $f_{k+1}(x)$:増加

$f_{k+1}(0)=1-1=0$

$\therefore f_{k+1}(x)>0$

[551] $x>0$, n:自然数

$e^{-x}\left\{1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right\}>\left(1-\dfrac{x^n}{n!}\right)e^x$ を証明

[証2] 積のビブン回避

とおく

$g(x)=e^{-x}\times\left\{1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right\}-\left(1-\dfrac{x^n}{n!}\right)$

$g'(x)=\triangle e^{-x}\{\,//\,\}+e^{-x}\times\left\{1+\dfrac{x}{1!}+\cdots+\dfrac{x^{n-2}}{(n-2)!}\right\}+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

$\quad =-e^{-x}\times\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\left(1-\overset{\oplus}{e^{-x}}\right)\times\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}>0$

$g'(x)>0$ より $g(x)$ は単調増加

$g(0)=1-1=0$ より $x>0$ で $g(x)>0$ ■

[552] (2) ← (1) が誘導

(1) $x>0$ のとき $x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$ を証明

$f(x)=x-\log(1+x)$ とおく

$f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}>0$ より

$f(x)$ は単調増加

$f(0)=0$ より

$x>0$ で $f(x)>0$

$g(x)=\log(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)$ とおく

$g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-(1-x)=\dfrac{x^2}{1+x}>0$ より

$g(x)$ は単調増加

$g(0)=0$ より

$x>0$ で $g(x)>0$

$\therefore x>0$ で $x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$ ■

(2) $n \geqq 2$ の自然数, $a_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{?}$

$\log a_n = \log(\ )\times\cdots\times(\ ) = \log(\ )+\log(\ )+\cdots+\log(\ )$

$= \sum_{k=1}^{n-1} \log\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$

(1)より $\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2 < \log\left(1+\frac{k}{n^2}\right) < \frac{k}{n^2}$

$k=1,2,\cdots,n-1$ でたす

$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} k - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 < \sum_{k=1}^{n-1}\log\left(1+\frac{k}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} k$

2次　3次 だの　$\log a_n$　2次

ここで $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$ ← 3次

$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}(n-1)n$ ← 2次

より, 極限をとって

$\frac{1}{2} \leqq \lim_{n\to\infty} \log a_n \leqq \frac{1}{2}$

はさみうちの原理より

$\lim_{n\to\infty} \log a_n = \frac{1}{2}$ — (答え)

$\log x$ は連続関数だから

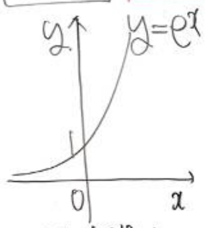
$\log\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \log e^{\frac{1}{2}}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

$f(x)$ 連続 なら

$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$

チャレ(69)　物理的問題 @数学 ⇒ 記号を運用



$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = (x(t), y(t)) \\ \vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \\ \vec{\alpha} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) \end{cases}$

等速　右向き

$\left(|\vec{v}|=1, \frac{dx}{dt}>0\right)$

(1) $|\vec{v}|^2=1$ より　$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=1$ ——①

$y=e^x$ を用いる　$\frac{dy}{dx}=e^x$ ——②

別) $y=e^x$ をtで　$\frac{dy}{dt} = e^x \cdot \frac{dx}{dt}$

これを用いても同じ

①より　$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}=1$　e^x

d〇〇は分数扱い

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{1+e^{2x}}$

$\frac{dx}{dt}>0$ より $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\times\frac{dx}{dt} = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

$\therefore$ $P(s, e^s)$ での $\vec{v}$ は

$\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2s}}}, \frac{e^s}{\sqrt{1+e^{2s}}}\right)$

70講 積分(1)　(積分定数Cは略)

553　$\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$, $\frac{1}{3}x^3-3\log|x|-\frac{2}{x}$

$-4\cos x-3\sin x$, $2e^x+\frac{3^x}{\log 3}$

554　$\frac{1}{10}(2x-1)^5$, $-\frac{1}{4}\cos 4x$, $3e^{\frac{x}{3}+1}$

$\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+2(x+1)^{\frac{1}{2}}$

555　$(a,b)=(2,-1)$, $2\log|x-1|-\log|x+2|$

556　$f^n \times f'$ など　$\frac{1}{2}(x^3+2)^2$, $-\frac{1}{5}\cos^5 x$

チャン　e^{x^2}, $\frac{1}{2}(\log x)^2$

557　$\frac{f'}{f}$　$\log|x^3+1|$, $\log(e^x+e^{-x})$, $-\log|\cos x|$

558 (1) 半角公式　$\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x$

(2) $\cos x$ を1つセパレート ⇒ $f^n \times f'$

$\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x$

(3) $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$ ⇒ BBB

$\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|$

BBB 部分分数分解

(4) 積和　$\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x$

553　$\left(\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}\right)$

554 (2) $t=x+1$ OR $t=\sqrt{x+1}$

$\boxed{559}$ (1) $\boxed{t=\tan\frac{x}{2} \text{ とおくと} \quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}}$ 半角tan $\left(\tan x=\frac{2t}{1-t^2}\right)$

証 $S=\sin\frac{x}{2},\ C=\cos\frac{x}{2}$ とおくと $C^2+S^2=1$, $t=\frac{S}{C}$

$$\sin \boxed{x}=\sin \boxed{2\times\frac{x}{2}}=2SC=\frac{2SC}{\underset{=1}{C^2+S^2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos \boxed{x}=\cos \boxed{2\times\frac{x}{2}}=C^2-S^2=\frac{C^2-S^2}{\underset{=1}{C^2+S^2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

(一般的には $\boxed{\frac{1}{C^2}=1+t^2}$ を利用することが多い)

(2) $\int \frac{5}{3\sin x+4\cos x}dx$

$t=\tan\frac{x}{2}$ で置換

$\frac{dt}{dx}=\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\times\frac{1}{2}$

$\therefore dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

$$=\int \frac{5}{3\times\frac{2t}{1+t^2}+4\times\frac{1-t^2}{1+t^2}}\times\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=\int \frac{5}{3t+2(1-t^2)}dt$$

$$=\int \frac{5}{-(2t+1)(t-2)}dt$$

$\frac{5}{-(2t+1)(t-2)}=\frac{a}{2t+1}+\frac{b}{t-2}$ とおく

$-5=a(t-2)+b(2t+1)$

$t\to 2$ とおくと $-5=5b$

$t\to -\frac{1}{2}$ 〃 $-5=-\frac{5}{2}a$

$\begin{cases} b=-1 \\ a=2 \end{cases}$

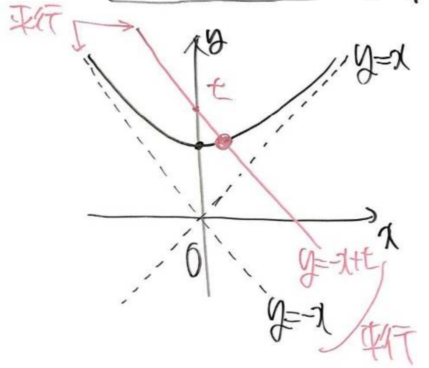
$$=\int \left(\frac{2}{2t+1}-\frac{1}{t-2}\right)dt$$

$$=\log|2t+1|-\log|t-2|+C$$

$$=\log\left|\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-2}\right|+C \cdots \text{答}$$

$\boxed{560}$ $\boxed{\text{学習テーマ}}$ $\int \underset{=y}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \Rightarrow$ 双パラ

(1) $\boxed{\text{双パラの作り方}}$ $\overset{①}{y=\sqrt{x^2+1}}$, $\overset{②}{y=-x+t}$



①より

$(\underset{=t}{y+x})(y-x)=1$

$t=y+x,\ \frac{1}{t}=y-x$

$$\therefore \begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) \\ y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) \end{cases}$$

(2) $\int \sqrt{\overset{y}{x^2+1}}\,dx$ を

$x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$ で置換積分

$\left[y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]$

【演習の時間】

過去問めぐり. 2019 フジタ医科

$\boxed{1}$ (10) $P(z)$: $|60z-2|=1$ —— ※

$Q(w)$: Qは半直線OP上で, $OP \times OQ = 1$ をみたす

⇨ Qは半径 $\boxed{}$ の円を描く.

$\boxed{テーマ}$ 反転 = 円の対応

$\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OP}$

$z = x+yi$, $w = X+Yi$ とおくと

$\overrightarrow{OP} = (x, y)$, $\overrightarrow{OQ} = (X, Y)$

条件より $\begin{cases} \overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OQ} \ (k>0) \text{ かつ} \\ |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}| = 1 \end{cases}$

$k|\overrightarrow{OQ}|^2 = 1$ より $k = \dfrac{1}{|\overrightarrow{OQ}|^2}$

よって $\boxed{\overrightarrow{OP} = \dfrac{1}{|\overrightarrow{OQ}|^2}\overrightarrow{OQ}}$

$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{X^2+Y^2}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}}$

代入

※より $60\left|z - \dfrac{1}{30}\right| = 1$

$\left|z - \dfrac{1}{30}\right| = \dfrac{1}{60}$ ← $z = x+yi$

中心 $\frac{1}{30}$　半径 $\frac{1}{60}$

$\left(x - \dfrac{1}{30}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{1}{60}\right)^2$

展開してから代入

$x^2 + y^2 - \dfrac{1}{15}x + \dfrac{1}{1200} = 0$

$\dfrac{1}{X^2+Y^2} - \dfrac{1}{15} \times \dfrac{X}{X^2+Y^2} + \dfrac{1}{1200} = 0$

$1200 - 80X + X^2 + Y^2 = 0$

$(X-40)^2 + Y^2 = 400$

よって点Qは半径 $\boxed{20}$ の円を

☆ $\boxed{x = \dfrac{X}{X^2+Y^2},\ y = \dfrac{Y}{X^2+Y^2}}$ より

$x^2 + y^2 = \left(\dfrac{X}{X^2+Y^2}\right)^2 + \left(\dfrac{Y}{X^2+Y^2}\right)^2$

$= \dfrac{X^2+Y^2}{(X^2+Y^2)^2} = \dfrac{1}{X^2+Y^2}$

反転は逆数の共役

$\boxed{改善1}$ $\boxed{z = \dfrac{1}{\overline{w}} \text{ と表せる}}$

㊎ $x + yi = \dfrac{1}{X - Yi} \times \dfrac{X+Yi}{X+Yi} = \dfrac{X+Yi}{X^2+Y^2}$

$x = \dfrac{X}{X^2+Y^2}$, $y = \dfrac{Y}{X^2+Y^2}$

$|60z - 2| = 1$ ← $z = \dfrac{1}{\overline{w}}$　$\left|z - \dfrac{1}{30}\right| = \dfrac{1}{60}$

中心　半径

$\left|\dfrac{60}{\overline{w}} - 2\right| = 1$

$\left|\dfrac{60 - 2\overline{w}}{\overline{w}}\right| = 1.$

$2^2|30 - \overline{w}|^2 = |\overline{w}|^2$

$4(30-w)(30-\overline{w}) = w\overline{w}$

$3w\overline{w} - 120w - 120\overline{w} + 3600 = 0$

$w\overline{w} - 40w - 40\overline{w} + 1200 = 0$

$(w-40)(\overline{w}-40) = 400$

$|w - 40|^2 = 20^2$

$|w - 40| = 20$

中心　半径

$\boxed{改善2}$

$\boxed{反転では円の対応}$