zemik2020-09-08（board）

471 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n}\cos\frac{2n\pi}{3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{7^k}\cos\frac{2k\pi}{3}$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{7^k}\cos\frac{2k\pi}{3}$ とおく　　$-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1$ のくり返し　周期3

月　火　水

$S_{3m}=\frac{1}{7^1}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7^2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7^3}\times1$

$+\frac{1}{7^4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7^5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7^6}\times1$　$\times\frac{1}{7^3}$

⋮　$\times\frac{1}{7^3}$

$+\frac{1}{7^{3m-2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7^{3m-1}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7^{3m}}\times1$　$\times\frac{1}{7^3}$

（初項 $\frac{1}{7}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7^2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7^3}$

公比 $\frac{1}{7^3}$，項数 m の等比の和）

$S_{3m}=-\frac{27}{7^3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{7^3}\right)^m}{1-\frac{1}{7^3}}$

$=-\frac{3}{38}\left\{1-\left(\frac{1}{343}\right)^m\right\}$ より

（与式）$=\lim_{m\to\infty}S_{3m}=-\frac{3}{38}$ ——~~（答）~~

水 おわりとは限らない

$S_{3m-1}=S_{3m}-\frac{1}{7^{3m}}\longrightarrow-\frac{3}{38}$

$S_{3m-2}=S_{3m-1}-\frac{1}{7^{3m-1}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\to-\frac{3}{38}$

$(m\to\infty)$

より $\lim_{m\to\infty}S_{3m}=\lim_{m\to\infty}S_{3m-1}=\lim_{m\to\infty}S_{3m-2}$

$=-\frac{3}{38}$

よって（与式）$=-\frac{3}{38}$

---

477 (1) Gauss の lim ⇨ 不等式 & はさみうち

π

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(2^x+3^x\right)^{\frac{1}{x}}$

《考察》 $\boxed{\text{無限大のオーダー}}$　ゴミ $2^x\ll\boxed{3^x}$

$0<2^x<3^x$ より

$3^x<2^x+3^x<2\cdot3^x$

$3<\left(2^x+3^x\right)^{\frac{1}{x}}<2^{\frac{1}{x}}\times3$

極限とると

$3\le\lim_{x\to\infty}\left(2^x+3^x\right)^{\frac{1}{x}}\le3$

はさみうちの原理より

（与式）$=3$

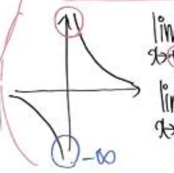
60講

473 (1) 代入 -2

(2) $\frac{0}{0}$ ⇨ 約分 $-\frac{3}{2}$

(3) $\frac{0}{0}$ ⇨ 有理化&約分 $\frac{3}{2}$

(4) $\boxed{\frac{1}{+0}=+\infty,\ \frac{1}{-0}=-\infty}$ より ∞

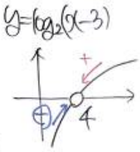


$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty$

$\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty$

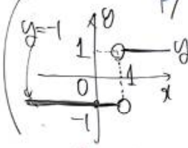
474 (1) ∞ ← $\left(\frac{1}{+0}=\infty\right)$

(2) $-\infty$ ← $\left(\frac{1}{-0}=-\infty\right)$



475 $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$

発散する



476 (1) ∞　(2) ∞ ← $\left(\infty-\infty\ \text{2次}\ \text{1次}\right)$ ≪る

(3) $-\frac{1}{2}$ ← $\left(\infty-\infty\ \text{1次}\ \text{1次}\xrightarrow{\text{有理化}}\frac{\infty}{\infty}\left(\frac{\text{1次}}{\text{1次}}\right)\right)$

(4) $x=-t$ とおくと安全.

1　　$\infty-\infty$ 1次 1次 $\xrightarrow{\text{有理化}}\frac{\infty}{\infty}\left(\frac{\text{1次}}{\text{1次}}\right)$

---

477 (1) Gauss の lim ⇨ 不等式 & はさみうち

π

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(2^x+3^x\right)^{\frac{1}{x}}$

《考察》 $\boxed{\text{無限大のオーダー}}$　ゴミ $2^x\ll\boxed{3^x}$

$0<2^x<3^x$ より

$3^x<2^x+3^x<2\cdot3^x$

$3<\left(2^x+3^x\right)^{\frac{1}{x}}<2^{\frac{1}{x}}\times3$

極限とると

$3\le\lim_{x\to\infty}\left(2^x+3^x\right)^{\frac{1}{x}}\le3$

はさみうちの原理より

（与式）$=3$

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{[5^x\pi]}{5^x}$　小数部分の有無

《考察》 $x\to\infty$ のとき $[5^x\pi]\fallingdotseq5^x\pi$

より（与式）$=\pi$

$\boxed{[a]\le a<[a]+1}$ より

$a-1<[a]\le a$

$5^x\pi-1<[5^x\cdot\pi]\le5^x\pi$

$\pi-\frac{1}{5^x}<\frac{[5^x\cdot\pi]}{5^x}\le\pi$

極限とって

$\pi\le\lim_{x\to\infty}\frac{[5^x\cdot\pi]}{5^x}\le\pi$

はさみうちの原理より

（与式）$=\pi$

さらに余力のある人は
$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$ の収束・発散を 調べよ

(2) $\lim_{x\to\infty}(2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}$

《考察》 無限大のオーダー $2^x \ll 3^x$ ゴミ

$0<2^x<3^x$ より

$3^x<2^x+3^x<2\cdot 3^x$

$3<(2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}<2^{\frac{1}{x}}\times 3$

極限をとると $3\le\lim_{x\to\infty}(2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}\le 3$

はさみうちの原理より

(与式) $=3$

1→ 類題 石巻か. 2007 聖マ

(1) $3^n<2^n+3^n<2\times 3^n$

$3<(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}}\times 3$

↓ はさみうち

$\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$ ゴミ 優先

(2) $0\le a<b$ のとき ゴミ

$\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}=\boxed{b}$

誘導

1(3) $f(x)=\lim_{n\to\infty}(\cos^{2n}x+\sin^{2n}x)^{\frac{1}{n}}$

$f(\frac{\pi}{6})=\lim_{n\to\infty}\{(\frac{3}{4})^n+(\frac{1}{4})^n\}^{\frac{1}{n}}=$

$f(\frac{\pi}{4})=\lim_{n\to\infty}\{2\times(\frac{1}{2})^n\}^{\frac{1}{n}}=$

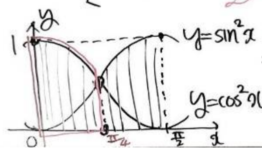
$f(\frac{\pi}{3})=\lim_{n\to\infty}\{(\frac{1}{4})^n+(\frac{3}{4})^n\}^{\frac{1}{n}}=$

(4)

さらに余力のある人は
$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$ の収束・発散を 調べよ

(4) $f(x)=\lim_{n\to\infty}(\cos^{2n}x+\sin^{2n}x)^{\frac{1}{n}}$

$=\begin{cases}\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2} & (0\le x\le\frac{\pi}{4})\\ \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2} & (\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2})\end{cases}$



$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$

$=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$

→ 類題 石巻か. 2007 聖マ

(1) $3^n<2^n+3^n<2\times 3^n$

$3<(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}}\times 3$

↓ はさみうち

$\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$ ゴミ 優先

(2) $0\le a<b$ のとき ゴミ

$\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}=\boxed{b}$

誘導

(3) $f(x)=\lim_{n\to\infty}(\cos^{2n}x+\sin^{2n}x)^{\frac{1}{n}}$ ← 0^∞

0, cos, sin, $\frac{\pi}{4}$

$f(\frac{\pi}{6})=\lim_{n\to\infty}\{(\frac{3}{4})^n+(\frac{1}{4})^n\}^{\frac{1}{n}}=\frac{3}{4}$

$\boxed{f(\frac{\pi}{4})}=\lim_{n\to\infty}\{2\times(\frac{1}{2})^n\}^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$ $2^{\frac{1}{n}}\times\frac{1}{2}$

$f(\frac{\pi}{3})=\lim_{n\to\infty}\{(\frac{1}{4})^n+(\frac{3}{4})^n\}^{\frac{1}{n}}=\frac{3}{4}$

(4) $\frac{\pi}{4}+\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$(\frac{3}{4})\left\{1+\frac{(\frac{1}{4})^n}{(\frac{3}{4})^n}\right\}$

$\boxed{479}$ $f(x)$: 多項式

I ① $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2-1}=2$ 収束

$\frac{\infty}{\infty}$ (2次のはず / 2次)

x^2の係数比

II ② $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=3$

I ①より $f(x)=x^3+2x^2+\boxed{ax+b}$ と表せる

II ②: 分母→0で収束 ∴分子→0が必要

$f(1)=3+a+b=0$

∴ $b=-(a+3)$

$\frac{0}{0}$ にもち込む

②の左(1)

$=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2+ax-(a+3)}{x^2-1}$ $\frac{0}{0}$ ⇒ 約分

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+3x+a+3)}{(x-1)(x+1)}$

$=\frac{7+a}{2}=3$ $a=-1$

$(a,b)=(-1,-2)$

よって $f(x)=x^3+2x^2-x-2$

不定形 ↗5種

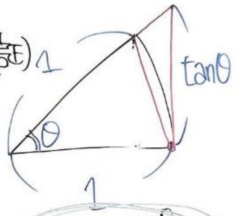
- $\frac{0}{0}$ ⇨ 約分, 公式, 微分の定義
- $\frac{\infty}{\infty}$ ⇨ 次数の比較, 指数の底の比較
- $\infty-\infty$, $\infty\times 0$ ⇨ 変形して他の型へ
- $(1+0)^{\infty}$ ⇨ e の定義へ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \Leftrightarrow \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

$$\boxed{\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1} \quad t=\frac{s}{c} \quad \lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1 \qquad \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2}$$

（半角 OR $\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$）

(証)



$\sin\theta<\theta<\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\sin\theta<\theta$　　$\theta\cdot\cos\theta<\sin\theta$

$\theta\cdot\cos\theta<\sin\theta<\theta$

面積

二辺の△　おうぎ形　直角△

$$\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin\theta<\frac{1}{2}\times 1^2\times\theta<\frac{1}{2}\times 1\times\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\theta\cdot\cos\theta<\sin\theta<\theta$$

$\theta>0$ より

$$\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1$$

極限　$1\leqq\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}\leqq 1$

はさみうちの原理より　$\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$　~~証明終~~

右極限にすぎない

$f(\theta)=\frac{\sin\theta}{\theta}$ とおくと

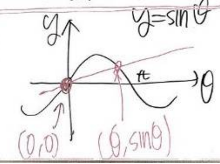
$$f(-\theta)=\frac{\sin(-\theta)}{-\theta}=\frac{-\sin\theta}{-\theta}=\frac{\sin\theta}{\theta}=f(\theta)$$

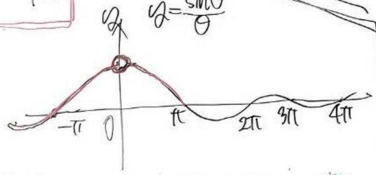
より $f(\theta)$ は $\boxed{\text{偶関数}}$

$$\lim_{\theta\to-0}f(\theta)=\lim_{\theta\to+0}f(\theta)=1 \quad ■$$

$\boxed{f(\theta)=\frac{\sin\theta}{\theta}\ :\ \text{勾配関数の一種}}$

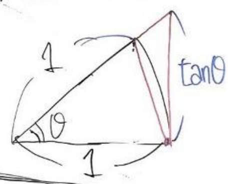
$$=\frac{\sin\theta-\sin 0}{\theta-0}$$





$$\boxed{\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1} \quad t=\frac{s}{c} \quad \lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1 \qquad \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2}$$

（半角 OR $\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$）



面積

二辺の△　おうぎ形　直角△

$$\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin\theta<\frac{1}{2}\times 1^2\times\theta<\frac{1}{2}\times 1\times\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\theta\cdot\cos\theta<\sin\theta<\theta$$

$\theta>0$ より

$$\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1$$

極限　$1\leqq\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}\leqq 1$

はさみうちの原理より　$\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$　~~証明終~~

右極限にすぎない

$$\boxed{\sqrt{X^2}=|X|}$$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{\theta\to-0}\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\theta}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

~~答~~

より　発散

解1

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2}$$

解2　半角公式

$$\frac{1-\cos\theta}{2}=\sin^2\frac{\theta}{2}$$

解3

$$(1-\cos\theta)\times(1+\cos\theta)=\sin^2\theta$$

を利用

先週の演習!!

④ 次の極限の収束・発散を調べよ

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi} \leftarrow \theta=x-\pi \text{ とおく}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos(\theta+\pi)}}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\theta}$$

（このあとどうする？）

$\theta=\sqrt{\theta^2}$ は $\theta>0$ のみ

$$\lim_{\theta\to 0}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}}{\theta}$$

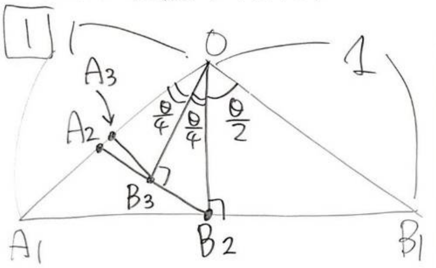
$$=\sqrt{2}\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}\times 2}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\times\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1}\times\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$\sin^2\theta$

limの発展アラカルト

$\boxed{1}$



$a_n = OA_n = OB_n$

(1) $a_3 \cdot \sin\frac{\theta}{4}$ を求めよ

$OA_1 = OB_1 = 1$

すみません
訂正

$a_3 = OA_3 = OB_3 = OB_2 \cos\frac{\theta}{4}$

$= (OB_1 \cdot \cos\frac{\theta}{2}) \times \cos\frac{\theta}{4}$

$= \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}$

$\vdots$

(2)へ

$a_n = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{8}\cos\frac{\theta}{16}\cdots$

$\cos\boxed{\ } \times \sin\boxed{\ }$

$a_3 \cdot \sin\frac{\theta}{4} = \cos\frac{\theta}{2}\boxed{\cos\frac{\theta}{4} \times \sin\frac{\theta}{4}}$ (答)

$= \cos\frac{\theta}{2} \times \boxed{\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2}}$

$= \frac{1}{2}\boxed{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$

$= \frac{1}{2} \times \boxed{\frac{\sin\theta}{2}}$

$= \frac{1}{4}\sin\theta$

$\boxed{1}$ 具体化
⇒ 規則性

$\boxed{2}$ (小ネタあり)

$\boxed{3}$ 計算
(わなあり)