解の問題の処理

（１）　解を求める。

（２）　解を元の方程式に代入＆次数下げ

（３）　解と係数の関係

（４）　解　⇔　因数

（５）　解　⇔　グラフの共有点の x 座標　（できれば**定数分離**）

（特殊な問題）

○共通解

○共役解

○1 の 3 乗根 ω

○相反方程式

○3 次方程式の重解問題に注意

【例題 01】

方程式 $2x^2-3x+4=0$ の 2 解を α,β とするとき，$(\alpha^2+2)(2\beta^2+3\beta+4)$ の値を求めよ。

【例題 02】

方程式 $x^3+ax+a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，a は定数とする。

【例題 03】

k を実数とする。x の 3 次方程式 $x(x^2-4k+4)+k(k-2)^2=0$ の解がすべて実数であるような k の値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\leqq k\leqq\boxed{\text{ツ}}$ である。

整式＝n次式

わりざんの原理

$$F \div P = Q \text{ あまり } R$$

$$\Rightarrow \quad F = P \times Q + R$$

ただし，$(P\text{の次数}) > (R\text{の次数})$

㊟　因数定理

$f(x)$が$(x-\alpha)$を因数に持つ　つまり　$(x-\alpha)$で割り切れる

$\Leftrightarrow \quad f(x) = (x-\alpha) \times \boxed{}$

$\Leftrightarrow \quad f(\alpha) = 0 \quad \leftarrow \quad x = \alpha$を代入してゼロ

㊟　剰余の定理　も同様にわりざんの原理から作れる。

２次式で割る問題

（１）実際にわり算
（２）余りの変形
（３）微分の利用
（４）虚数でも強引に代入

【例題 04】（2011 岩手医）

［１］xの整式$\mathrm{P}(x)$をx^2+1，x^2+2で割ったときの余りをそれぞれ$4x+4$，$4x+8$とするとき，

(1)　$\mathrm{P}(x)$を$(x^2+1)(x^2+2)$で割ったときの余りを求めよ。

(2)　$\mathrm{P}(x)$を５次の多項式として，$\mathrm{P}(0)=-2$，$\mathrm{P}(1)=6$とするとき，$\mathrm{P}(x)$を求めよ。

［２］　nは３以上の奇数として，多項式$P(x)=x^n-ax^2-bx+2$を考える。
$P(x)$がx^2-4で割り切れるときは$a=\boxed{(あ)}$，$b=\boxed{(い)}$であり，
$(x+1)^2$で割り切れるときは$a=\boxed{(う)}$，$b=\boxed{(え)}$である。　（2011 慶應・医）

談話室マロニエ　数学 QUIZ　数と式

A 問題

因数分解公式　$a^3+b^3=\boxed{ア}$

$a^3-b^3=\boxed{イ}$

$a^3+b^3+c^3-\boxed{ウ}=\boxed{エ}$

因数分解の手順

①共通因数でくくる，②低次の一文字で整理，③カタマリを作る（文字置き換え），④因数分解公式

恒等式　⇒　①$\boxed{オ}$，②$\boxed{カ}$。

x の不等式を解くと　$|x|<a \Leftrightarrow \boxed{キ}$,　$|x| \geqq a \Leftrightarrow \boxed{ク}$

二重根号の公式　$\sqrt{a+b\pm2\sqrt{a\cdot b}}=\boxed{ケ}$　$(a<b)$　証明は簡単！

除法の原理　$f(x)$ を $p(x)$ で割った商が $q(x)$，余りが $r(x)$ であるとき，

$f(x)=p(x)q(x)+r(x)$　ただし，$r(x)$ の次数$<\boxed{コ}$の次数

$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ を見たら，$\boxed{サ}$

2 文字の対称式　⇒　$\boxed{シ}$と$\boxed{ス}$で表せる。

$a^2+b^2=\boxed{セ}$

$a^3+b^3=\boxed{ソ}$

$(a-b)^2=\boxed{タ}$

2 次方程式の解と係数の関係

x の 2 次方程式　$ax^2+bx+c=0$　の解が $x=\alpha, \beta$

$\Leftrightarrow$　$\alpha+\beta=\boxed{チ}$，$\alpha\beta=\Leftrightarrow\boxed{ツ}$

証明のポイントは，解の公式をもちいるか，$\boxed{テ}$。

相加相乗（相加平均と相乗平均の関係の不等式）

（2文字）$a>0, b>0$ のとき，$\boxed{\text{ト}}$　等号成立は $\boxed{\text{ナ}}$ のとき。

（3文字）$a>0, b>0, c>0$ のとき $\boxed{\text{ニ}}$　等号成立は $\boxed{\text{ヌ}}$ のとき。

【課題】4文字のときも含めて，証明法を学習せよ。

B問題

（復習）関数の基本は<u>変数をまとめること</u>。まとめられなくても「<u>微分</u>」がある。

方程式・不等式の基本は $\boxed{\text{ア}}$

共通解問題　共通解を $x=\alpha$ とおき，文字定数消去　または　「最高次の項を消去」

3次方程式の解と係数の関係

x の3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解が $x=\alpha, \beta, \gamma$

$\alpha+\beta+\gamma=\boxed{\text{イ}}$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\boxed{\text{ウ}}$，$\alpha\beta\gamma=\boxed{\text{エ}}$

1次で割った余りの求め方　⇒　代入する

2次で割った余りの求め方

⓪　異なる因数に因数分解されるなら，代入するだけ。

<u>①　実際にわる</u>

<u>②　余りの変形</u>

<u>③　因数分解できなくても虚数を代入</u>

<u>④　微分・・・ただし $(x-\alpha)^2$ のときのみ</u>

解の問題の処理

①　$\boxed{\text{オ}}$

②　$\boxed{\text{カ}}$

③　$\boxed{\text{キ}}$

④　$\boxed{\text{ク}}$

⑤　$\boxed{\text{ケ}}$

（例外多数）＝挙げられるだけ挙げよ。

$\boxed{\text{C 問題}}$

$\boxed{\text{複二次式}}$（偶数次のみの 4 次式）

$\Rightarrow x^2$ をカタマリで考えてダメなら，真ん中 x^2 を調節して　$●^2-▲^2$ を作る

直接代入計算が面倒な時は，代入してゼロとなる式で割って次数下げ

有理数解の候補

整数係数 n 次方程式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$

が有理数解 α をもつとき，$\alpha=\dfrac{a_n\text{の約数}}{a_0\text{の約数}}$

判別式は，虚数係数のときには使えないが，重解判定には使える。

【MEMO】

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより

①標-1-1

n は 2 以上の整数とする。整式 x^n を $(x-1)^2$ で割った余りを求めよ。

①標-1-2

n は自然数とする。整式 x^n を x^2+1 で割った余りを求めよ。

①標-1-3

n は自然数とする。整式 x^n を x^2+x+1 で割った余りを求めよ。

①標-1-4

次の分数式が既約分数式でないような定数 a の値を求め，そのときの分数式を約分せよ。

$$\frac{x^3-ax^2+12x-a-3}{x^3-(a+1)x^2+16x-a-6}$$

①標-1-5

$2\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ と $2\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ を解とする整数係数の 2 次方程式を作れ。ただし，x^2 の係数は 1 とする。

①$\boxed{\text{標-1-6}}$

2次方程式 $x^2+px+q=0$ の2つの解を $\alpha, \beta\ (\alpha \neq \beta)$ とするとき，$f(\alpha)=\beta$，$f(\beta)=\alpha$ を満たす2次式が $f(x)=x^2+2px+2q$ であるという。このとき，p, q を求めよ。

①$\boxed{\text{標-1-7}}$

α, β, γ が以下の3式を満たすとする。

$$\alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-1,\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=4$$

このとき，次の問いに答えよ。

（1）α, β, γ を3解に持つ3次方程式を作れ。

（2）$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$ の値を求めよ。

①$\boxed{\text{標-1-8}}$

次の方程式を解け。

$$x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$$

①$\boxed{\text{標-1-9}}$

x についての2つの方程式 $x^2+x+k=0$，$x^3+2x^2+2kx+1=0$ がただ1つの共通の実数解をもつような k の値の範囲を求めよ。

①$\boxed{\text{標-1-10}}$ **（LTC）**

x, y, z は互いに異なる3つの実数で，$x+\dfrac{1}{y}=y+\dfrac{1}{z}=z+\dfrac{1}{x}$ が成り立つものとする。このとき，上の等式の各辺に共通の値を求めよ。

発展問題

①発-1-1 （LTC）

x についての二つの方程式

$$ax^2+(a^2+4)x+4a=0,\quad x^3+ax^2-ax-4=0$$

が，少なくとも一つの共通解をもつような定数 a の値を求めよ。

①発-1-2 難

$(x^2+2x-3)P(x)-(x^2-x-2)Q(x)=1$ ………①　を満たす整式 $P(x), Q(x)$ を考える。

(1)　①を満たす 1 次式 $P(x), Q(x)$ を求めよ。

(2)　(1)を利用して①を満たす 2 次式 $P(x), Q(x)$ をすべて求めよ。

①発-1-3

(1)　整式 $f(x)$ は $(x-2)^2$ で割ると 3 余るが，$x+2$ で割ると 35 余る。この整式 $f(x)$ を $(x-2)^2(x+2)$ 割ったときの余りを求めよ。

(2)　x^2+2x+3 で割ると $x+1$ 余り，x^2+1 で割ると 1 余る。この条件を満たす整式のうちで最も次数の低いものを求めよ。

①$\boxed{\text{発-1-4}}$

(1)　係数が整数である x の n 次方程式

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0 \qquad (a_0 \neq 0)$$

について，有理数 r が解ならば，r は整数であり，かつ a_0 の約数であることを示せ。

(2)　3 次方程式 $x^3 - 16x^2 - 20x + 51 = 0$ の解をすべて求めよ。

①$\boxed{\text{発-1-5}}$

整式 $f(x)$ について，恒等式 $f(x^2) = x^3 f(x+1) - 2x^4 + 2x^2$ が成り立つとする。

(1)　$f(0), f(1), f(2)$ の値を求めよ。

(2)　$f(x)$ の次数を求めよ。

(3)　$f(x)$ を決定せよ。

①$\boxed{\text{発-1-6}}$**難**

$p(x)$ を x に関する 3 次式とする。x^4 と x^5 を $p(x)$ で割った余りは等しくて 0 ではないとする。x の整式 $f(x)$ が $p(x)$ で割り切れず，$xf(x)$ は $p(x)$ で割り切れるとき，$f(x)$ を $p(x)$ で割った余り $r(x)$ を求めよ。ただし，$r(x)$ の最高次係数は 1 とする。

①$\boxed{\text{発-1-7}}$ **（LTC）**

x についての 3 次の整式 $f(x)$ があって

$$f(1)=1,\ f(2)=4,\ f(3)=9,\ f(4)=34$$

であるとき，$f(5)$ を求めよ。