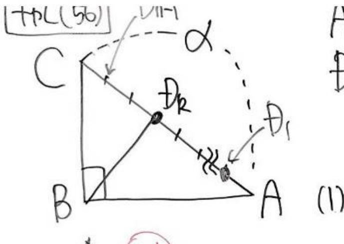
zemik2020-09-02（board）

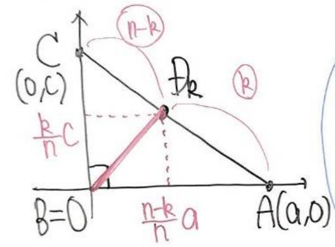


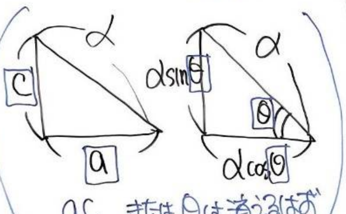
AC を n 等分

D_k：A から数えて k 番目

$L_k=\overline{BD_k}$

(1) $S_n=\sum_{k=1}^{n-1}(L_k)^2$ を α, n で表す





a, c または θ は消えるはず

便宜上 文字設定

図の座標をとり、B(0,0), A(a,0), C(0,c) とおく。

$L_k^2=BD_k^2=\left(\frac{n-k}{n}a\right)^2+\left(\frac{k}{n}c\right)^2$

$=\frac{1}{n^2}\left\{(n-k)^2a^2+k^2c^2\right\}$ より

(n−1), …, 2, 1　　1, 2, …, (n−1)

$S_n=\frac{1}{n^2}\left\{a^2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2+c^2\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right\}$

同じ　$\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$

$=\frac{1}{6n}(n-1)(2n-1)(a^2+c^2)$

$=\frac{(n-1)(2n-1)}{6n}\alpha^2$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\frac{1}{3}\alpha^2$

ベクトル利用 でもよい
三平方

5講

449　$|r|<1$ のとき $\lim_{n\to\infty}r^n=0$ を利用

(1) 0　(2) 2,　(3) $-\infty$

5^n で割る　　<3 (3^n で)

450　$a_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ より $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{2}$

451　無限等比数列 $\{a\cdot r^{n-1}\}$ の収束条件
$a=0$ または $-1<r\leqq 1$

$-9\leqq x<-1,\ \frac{5}{2}<x$

注 無限等比級数の収束条件　$\frac{a}{1-r}$
$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$
$a=0$ または $-1<r<1$

$\left\{\left(\frac{x^2-2x-7}{x^2-x+2}\right)^n\right\}$ の収束条件

$\frac{x^2-2x-7}{x^2-x+2}=0$ または $-1<\frac{x^2-2x-7}{x^2-x+2}\leqq 1$

分母払える

(分母) $=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$ より

$-(x^2-x+2)<x^2-2x-7\leqq x^2-x+2$

かつ

$2x^2-3x-5>0$　　$x\geqq -9$

$(2x-5)(x+1)>0$

$x>\frac{5}{2}$ または $x<-1$　　-9　-1　$\frac{5}{2}$

$-9\leqq x<-1,\ \frac{5}{2}<x$

452　誘導つき漸化式

(1) $b_{n+1}=5b_n+1$

(2) $b_n=\frac{5^n}{12}-\frac{1}{4}$ より

$a_n=\frac{12}{5^n-3}+2$　∴ $\lim_{n\to\infty}a_n=2$

~~(2n−1)次 / 2n次~~　指 / 指

453　$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+x^2+x}{x^{2n}+1}$

$\frac{\infty}{\infty}$ とは限らない

lim では、まず不定形に着目

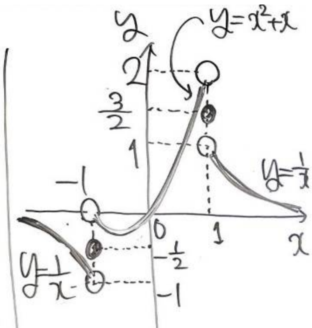
① n が変数

x と ±1 の大小で場合分け

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x & (|x|<1)\\ \frac{3}{2} & (x=1)\\ \frac{1}{x} & (|x|>1)\ ※\\ -\frac{1}{2} & (x=-1)\end{cases}$$

※ $|x|>1$ のとき $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{x^2+x}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}$

$=\frac{1}{x}$



454 (テーマ) 解けない漸化式の極限.

$\begin{cases} 0 < a_1 < 3 \\ a_{n+1} = 1 + \sqrt{1 + a_n} \end{cases} \Rightarrow$ (3) $\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{?}$

《考察》 $f(x) = 1 + \sqrt{1+x}$ とおくと $a_{n+1} = f(a_n)$

out　in

y　x

① 答だけなら 収束を仮定

$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$ とおくと

特性方程式

$\alpha = f(\alpha)$

$\alpha = 1 + \sqrt{1+\alpha}$

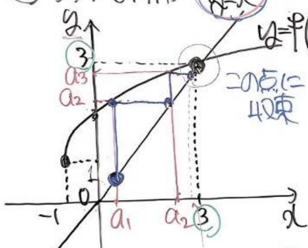
$\alpha - 1 = \sqrt{1+\alpha} \geqq 0$

$(\alpha-1)^2 = 1 + \alpha$ かつ $\alpha \geqq 1$

$\alpha^2 - 3\alpha = 0$ かつ $\alpha \geqq 1$

$\therefore \alpha = 3$ ―(答)

② グラフを利用　$y = x$ ふるさと



グラフより $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$ ―(答)

③ 極限値のしぼりこみ　区間縮小法

$a_{n+1} = 1 + \sqrt{1+a_n}$　両辺から3をひく

$a_{n+1} - 3 = \sqrt{a_n+1} - 2$

$(n+1)$ 作る

$= \dfrac{\sqrt{a_n+1} - 2}{1} \times \dfrac{\sqrt{\ \ } + 2}{\sqrt{\ \ } + 2}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{\ \ } + 2}(a_n - 3)$

(n) 出現

$|a_{n+1} - 3| = \dfrac{1}{\sqrt{\ \ }+2}|a_n - 3| \leqq \dfrac{1}{2}|a_n - 3|$

454 (2)とは異なる　$\therefore \boxed{|a_{n+1} - 3| \leqq \dfrac{1}{2}|a_n - 3|}$

(2) $a_{n+1} = 1 + \sqrt{1+a_n}$ より

$\underset{(n+1)}{3 - a_{n+1}} = 3 - (1 + \sqrt{1+a_n})$

$= \dfrac{2 - \sqrt{1+a_n}}{1} \times \dfrac{2 + \sqrt{\ \ }}{2 + \sqrt{\ \ }}$

$= \boxed{\dfrac{1}{2 + \sqrt{1+a_n}}}(3 - \underset{(n)}{a_n})$

ここで(1)より $a_n > 0$ $\therefore 2 + \sqrt{1+a_n} > 3$

$0 < \boxed{\dfrac{1}{2+\sqrt{1+a_n}}} < \boxed{\dfrac{1}{3}}$

$\therefore 3 - a_{n+1} < \dfrac{1}{3}(3 - a_n)$ ∎

(3) (2)より $0 < 3 - a_n < (3 - a_1) \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

極限をとって $0 \leqq \lim_{n\to\infty}(3 - a_n) \leqq 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(3 - a_n) = 0$

よって $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$ //

456 ← 454 の発展形 《Newton法》

発展例 $a_{n+1} = f(a_n)$　($x = f(x)$ の解 α)

$-)\ \ \alpha = f(\alpha)$

$a_{n+1} - \alpha = f(a_n) - f(\alpha)$　有理化 や 平均値の定理

$= \cdots\cdots$

$= \boxed{\ \ }(a_n - \alpha)$

455 (1) $h > 0$ のとき, 全ての自然数 n で　帰納法で示せ

$(1+h)^n \geqq 1 + nh + \dfrac{1}{2}n(n-1)h^2$ を証明

誤答例 二項定理より

$(1+h)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 h + {}_nC_2 h^2 + \cdots$

$\geqq 1 + nh + \dfrac{1}{2}n(n-1)h^2$ ∎

修正 ⇓ ↖ $n \geqq 2$ に限られる

$n = 1$ のとき 両辺ともに $1 + h$ より成立 ∎

(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{3^n} = \boxed{?}$

注 答だけなら $\dfrac{\infty\ (1次式)}{\infty\ (指数)} = 0$

(小) ≪ (大)　圧倒的に

記述では使用禁止

無限大のオーダー (発散スピード)

$\log n \ll \cdots \sqrt{n} \ll n^1 \ll n^2 \ll n^3 \ll \cdots \ll 2^n \ll e^n \ll 3^n \ll \cdots\ n!$

(1)で $h = 2$ とおくと

$3^n \geqq 1 + 2n + 2n(n-1)$

$3^n \geqq 2n^2 + 1$

$0 < \dfrac{1}{3^n} \leqq \dfrac{1}{2n^2+1}$

$0 < \dfrac{n}{3^n} \leqq \dfrac{n}{2n^2+1}$

極限とって $0 \leqq \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{3^n} \leqq 0$

はさみうちの原理より

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{3^n} = 0$ //

58講 n-th partial sum

[457] 無限級数 = 第n部分和の極限

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k}$$

(1) $1-\frac{1}{n+1} \longrightarrow 1$ (2) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}$

[459] (1) $\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \longrightarrow \frac{1}{2}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ $k=(k+1)-1$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} \right\}$$

$$= 1$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3k+1}$ ~~BBB? 階差~~

Σ計算できない!!

具体化

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3k+1} = \frac{1}{4} + \frac{2}{7} + \frac{3}{10} + \frac{4}{13} + \cdots + \left(ほぼ\frac{1}{3}\right) + \cdots$$

∞に発散

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束 $\xRightarrow{ならば}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(対偶) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散

$a_n = \frac{n}{3n+1}$ とおくと $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3} \neq 0$

よって $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散

(逆) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束

は真 or 偽

反例 $a_n = \frac{1}{n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3k+1}$ ~~BBB? 階差~~

Σ計算できない!!

具体化

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3k+1} = \frac{1}{4} + \frac{2}{7} + \frac{3}{10} + \frac{4}{13} + \cdots + \left(ほぼ\frac{1}{3}\right) + \cdots$$

∞に発散