過去問めぐり・整式の割り算

【１】2011 岩手医科大学

x の整式 $\mathrm{P}(x)$ を x^2+1, x^2+2 で割ったときの余りをそれぞれ $4x+4$, $4x+8$ とするとき，以下の設問に答えよ。

(1)　$\mathrm{P}(x)$ を $(x^2+1)(x^2+2)$ で割ったときの余りを求めよ。

(2)　$\mathrm{P}(x)$ を 5 次の多項式として，$\mathrm{P}(0)=-2$，$\mathrm{P}(1)=6$ とするとき，$\mathrm{P}(x)$ を求めよ。

【２】2011 慶應義塾大学 2/21, 1次 医

以下の文章の空欄に適切な**数または式**を入れて文章を完成させなさい。

(1)　n は 3 以上の奇数として，多項式 $P(x)=x^n-ax^2-bx+2$ を考える。$P(x)$ が x^2-4 で割り切れるときは $a=\boxed{\text{(あ)}}$，$b=\boxed{\text{(い)}}$ であり，$(x+1)^2$ で割り切れるときは $a=\boxed{\text{(う)}}$，$b=\boxed{\text{(え)}}$ である。

【解答１】

2 **解答** (1) $P(x)$ を x^2+1，x^2+2 で割ったときの商をそれぞれ $Q_1(x)$，$Q_2(x)$ とすると，与えられた条件から

$$P(x)=(x^2+1)Q_1(x)+4x+4 \quad \cdots\cdots ①$$

$$P(x)=(x^2+2)Q_2(x)+4x+8 \quad \cdots\cdots ②$$

と表せる。

さらに，$P(x)$ を 4 次式 $(x^2+1)(x^2+2)$ で割ったときの商を $Q_3(x)$ とし，余りを ax^3+bx^2+cx+d とすると

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+2)Q_3(x)+ax^3+bx^2+cx+d \quad \cdots\cdots ③$$

と表せる。

ここで，ax^3+bx^2+cx+d を x^2+1 で割ることにより③を変形すると

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2+1)(x^2+2)Q_3(x)+(ax+b)(x^2+1)+(c-a)x+(d-b)\\&=(x^2+1)\{(x^2+2)Q_3(x)+(ax+b)\}+(c-a)x+(d-b)\end{aligned}$$

よって，①より $(c-a)x+(d-b)$ と $4x+4$ は一致するから

$$c-a=4 \quad \cdots\cdots ④$$

$$d-b=4 \quad \cdots\cdots ⑤$$

また，ax^3+bx^2+cx+d を x^2+2 で割ることにより③を変形すると

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2+1)(x^2+2)Q_3(x)+(ax+b)(x^2+2)\\&\qquad\qquad+(c-2a)x+(d-2b)\\&=(x^2+2)\{(x^2+1)Q_3(x)+(ax+b)\}+(c-2a)x+(d-2b)\end{aligned}$$

よって，②より $(c-2a)x+(d-2b)$ と $4x+8$ は一致するから

$$c-2a=4 \quad \cdots\cdots ⑥$$

$$d-2b=8 \quad \cdots\cdots ⑦$$

④，⑥より　$a=0$，$c=4$

⑤，⑦より　$b=-4$，$d=0$

したがって，求める余りは

$$-4x^2+4x \quad \cdots\cdots (答)$$

参考　①，②，③に $x=i$，$\sqrt{2}\,i$ を代入することにより求めることもできる。

そのために③を次のようにしておく。

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+2)Q_3(x)+ax^3+bx^2+cx+d \quad \cdots\cdots ③$$

（ただし，a，b，c，d は実数の定数とする）

①，③に $x=i$ をそれぞれ代入すると

$$(P(i)=)4i+4=ai^3+bi^2+ci+d$$

$$(d-b)+(c-a)i=4+4i$$

a，b，c，d は実数より

$$d-b=4 \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$c-a=4 \quad \cdots\cdots ④$$

また，②，③に $x=\sqrt{2}i$ をそれぞれ代入すると

$$(P(\sqrt{2}i)=)4\sqrt{2}i+8=a(\sqrt{2}i)^3+b(\sqrt{2}i)^2+c(\sqrt{2}i)+d$$

$$(d-2b)+\sqrt{2}(c-2a)i=8+4\sqrt{2}i$$

a，b，c，d は実数より

$$d-2b=8 \quad \cdots\cdots ⑦$$

$$c-2a=4 \quad \cdots\cdots ⑥$$

となり，以下，〔解答〕と同様。

(2)　(1)の結果より

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+2)Q_3(x)-4x^2+4x$$

$P(x)$ が 5 次の多項式であるとき，$Q_3(x)$ は $px+q$ $(p\neq 0)$ と表せるから，$P(x)$ は次のようになる。

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+2)(px+q)-4x^2+4x \quad \cdots\cdots ⑧$$

$P(0)=-2$ より

$$2q=-2 \qquad \therefore \quad q=-1 \quad \cdots\cdots ⑨$$

$P(1)=6$ より

$$6(p+q)=6 \qquad \therefore \quad p+q=1 \quad \cdots\cdots ⑩$$

⑨，⑩より　　$p=2$，$q=-1$

したがって，求める $P(x)$ は，これらを⑧に代入すると

$$\begin{aligned} P(x)&=(x^2+1)(x^2+2)(2x-1)-4x^2+4x \\ &=2x^5-x^4+6x^3-7x^2+8x-2 \quad \cdots\cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

【解答２】2011 慶應義塾大学

(1)　(あ)　$\frac{1}{2}$　(い)　2^{n-1}　(う)　$-n-1$　(え)　$-n-2$