zemik2020-09-23（board）

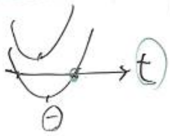
527 直線 $\ell_t : y=-tx+e^t$ （t:全実数）
の通過領域を求めよ　$(x,y)\longrightarrow$ tは存在?

逆手法　点(x,y)を通る直線の存在条件つまり
tの存在条件（x,yの式）を求める
(x,y)を定数扱い（固定）し tの方程式とみなす

$y=-t+e^t$

$e^t=t$

$$\underbrace{e^t-x\cdot t-y}_{g(t)\text{とおく}}=0$$



$\underline{g(t)=e^t-x\cdot t-y}$ とおく
$g'(t)=e^t-x$

(i) $x>0$のとき $g'(t)=0$ となるのは
$e^t=x$ つまり $t=\log x$

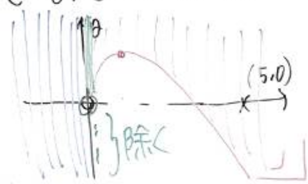
t	$\cdots$	$\log x$	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$\begin{cases} g(\log x)=x-x\log x-y\leqq 0 \\ \lim_{t\to\pm\infty} g(t)=+\infty \end{cases}$$

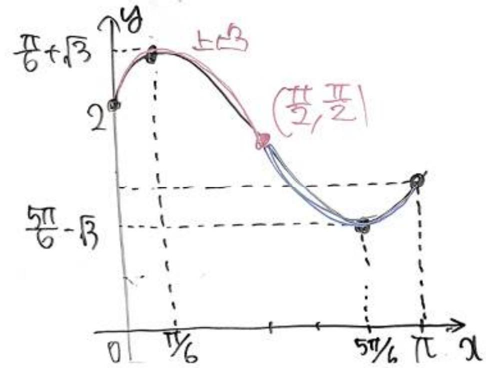
$y\geqq x(1-\log x)$

(ii) $x<0$のとき　$g'(t)=e^t+(-x)>0$
より $g(t)$は単調増加
$\lim_{t\to\infty} g(t)=\infty$, $\lim_{t\to-\infty}=-\infty$ より
$x<0$ なら必ず tは存在.

(iii) $x=0$のとき　$g(t)=e^t-y=0$
$e^t=y>0$のとき tは存在.



532 凹凸は分けて調べるのがオススメ.
$f(x)=x+2\cos x$　$(0\leqq x\leqq \pi)$
$f'(x)=1-2\sin x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$



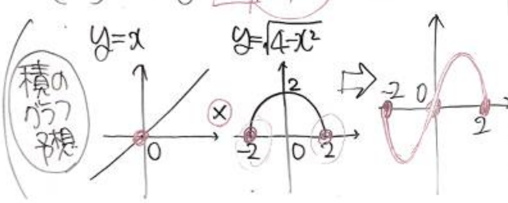
$f''(x)=-2\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$
変曲点 $\boxed{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{6}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cap$		$\cup$	

x	
$f'(x)$	
$f''(x)$	
$f(x)$	

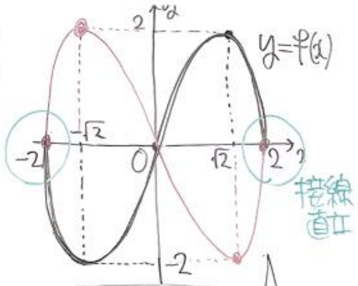
535 陰関数…… 大学受験では接線程度
$y^2=x^2\cdot(4-x^2) \Leftrightarrow y=\pm x\sqrt{4-x^2}$
$\underline{f(x)=x\sqrt{4-x^2}}$ とおく
ルート内$\geqq 0$より　$-2\leqq x\leqq 2$
（与式）$\Leftrightarrow y=\pm f(x)$　x軸対称



$f(x)=x(4-x^2)^{\frac{1}{2}}$ より
$f'(x)=1\times(4-x^2)^{\frac{1}{2}}+x\times\frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\times(-2x)$
$=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$
$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$　$(2-x^2)$

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$	$\boxed{-\infty}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\boxed{-\infty}$
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

$\frac{-4}{+0}$ } $\boxed{\lim_{x\to\pm 2} f'(x)=-\infty}$



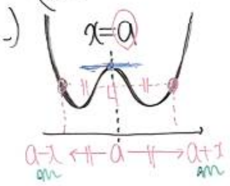
√を含む関数のグラフは端点で接線が直立する

36 (テーマ) 抽象関数の練習

線対称 ⤳ 垂直・二等分
点対称 ⤳ 中点 利用

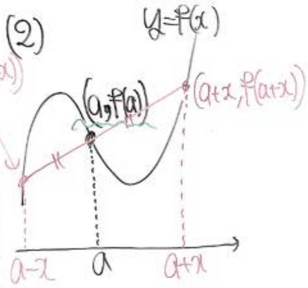
(y軸対称 ⤳ 偶関数, 原点対称 ⤳ 奇関数)

(1)



条件より
$f(a+x)=f(a-x)$
両辺をxで微分
$f'(a+x)=f'(a-x)\times(-1)$ 合成 ビ
$x=0$代入
$f'(a)=-f'(a)$
$\therefore \boxed{f'(a)=0}$ ■

(2)



条件より $\dfrac{f(a+x)+f(a-x)}{2}=f(a)$

xで ビ
$f(a+x)+f(a-x)=2\cdot f(a)$
$f'(a+x)+f'(a-x)\times(-1)=0$

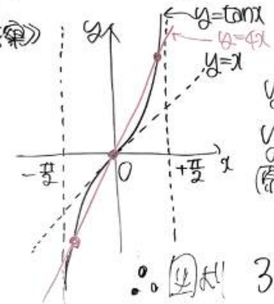
ビ
$f'(a+x)-f'(a-x)=0$
$f''(a+x)-f''(a-x)\times(-1)=0$

$x=0$代入 $2f''(a)=0$

$\boxed{f''(a)=0}$ ■ 変曲点の必要条件

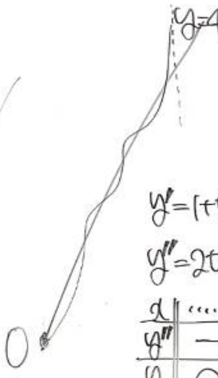
537 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$での 方程式 $\tan x=4x$の実数解の個数は $\boxed{?}$ 個

《考察》



$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$ より $\geqq 0$
$y=\tan x$の原点での接線は $y=x$

$\therefore$ 図より 3個



$y'=1+\tan^2 x$
$y''=2\tan x(1+\tan^2 x)$

x	……	0	……
y''	−	0	+
y	⌒		⌣

曲線 $y=f(x)$ と ナナメ直線の 上下関係では，凹凸も必要

曲線 $y=f(x)$ と $y=k$ の 上下関係なら 増減だけでよい

ヨコ棒

$\dfrac{\tan x}{x}=4$
または
$\tan x-4x=0$

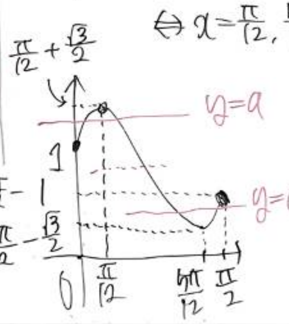
542 $f(x)$の極値 $\xleftrightarrow{\text{対応}}$ $f'(x)$の符号変化

$f(x)=\frac{1}{2}(x-a)^2+\sin x\cdot\cos x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$
$=\frac{1}{2}(x-a)^2+\frac{1}{2}\sin 2x$
$f'(x)=(x-a)+\cos 2x$
$=x+\cos 2x-a$ ← 関数における定数分離

$f'(x)$の符号 $\xleftrightarrow{\text{対応}}$ ($y=x+\cos 2x$と $y=a$ の上下)

[例] $f'(x)>0 \longleftrightarrow y=a$が下

$g(x)=x+\cos 2x$ とおく.
$g'(x)=1-2\sin 2x$.
$g'(x)=0 \Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$.



$\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<\frac{\pi}{2}-1$ または
$1<a<\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

類題例

$f'(x)=\boxed{▨}\left(△-a\right)$

544 k：正の整数

S(k)：xの方程式 $x=2k\pi\cdot\sin x$ ($x\geqq0$) の全ての解の和

このとき $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{S(k)}{k^2}=\boxed{?}$

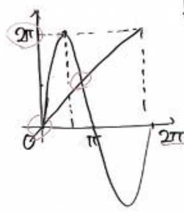
(Quiz 解の個数は $\boxed{2k}$ 個.)

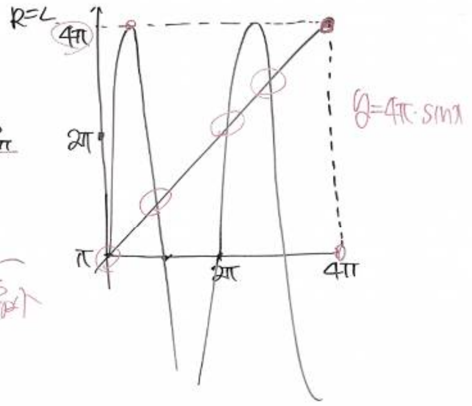
↓

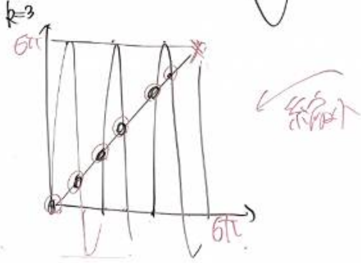
方針 S(k)を直接求めることはできない

不等式をたてて はさみうちの原理の利用へ

具体化 k=1







544 k：正の整数

S(k)：xの方程式 $x=2k\pi\cdot\sin x$ ($x\geqq0$) の全ての解の和

このとき $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{S(k)}{k^2}=\boxed{?}$

(Quiz 解の個数は $\boxed{2k}$ 個.)

↓

方針 S(k)を直接求めることはできない

不等式をたてて はさみうちの原理の利用へ

$\frac{1}{2k\pi}x=\sin x$

(0,0), $\boxed{(2k\pi,1)}$