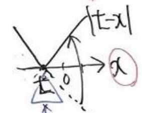
zemik2020-10-13（board）

$\boxed{312}$ $f(t)=\int_0^1 |t-x| e^x dx$.

(1) まず x で積分



(0, 1 との大小で場合分)

$g(x)=(t-x)e^x$,

$G(x)=te^x-(x-1)\cdot e^x$
$=(t-x+1)e^x$ とおく

$\begin{pmatrix} G(0)=t+1 \\ G(1)=te \\ G(t)=e^t \end{pmatrix}$

同一関数の積分 ⇒ 不定積分を文字でおく

(i) $t \leqq 0$ のとき

$f(t)=\left[G(x)\right]_0^1=-te+t+1=(1-e)t+1$

$f'(t)=1-e<0$ $\quad \boxed{a^{\log_a b}=b}$

(ii) $0<t<1$ のとき

$f(t)=\int_0^t g(x)dx+\int_t^1 \{-g(x)\}dx$

$=\left[G(x)\right]_0^t+\left[-G(x)\right]_t^1$

$=2G(t)-G(0)-G(1)$

$=2e^t-(e+1)t-1$

$f'(t)=2e^t-(e+1)$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\log\frac{e+1}{2}$.

(iii) $t \geqq 1$ のとき

$f(t)=\left[+G(x)\right]_0^1=(e-1)t-1$

$f'(t)=e-1>0$

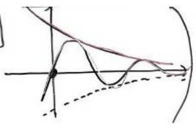
←(i)→ ←(ii)→ ←(iii)→

t	……	0	……	$\log\frac{e+1}{2}$	……	1	…
$f'(t)$	$-$	╳	$-$	0	$+$	╳	$+$
$f(t)$	↘		↘		↗		↗

$f(t)$ は連続だから.

最小値 $f\left(\log\frac{e+1}{2}\right)=e-(e+1)\cdot\log\frac{e+1}{2}$ //

$\boxed{613}$ テーマ $\boxed{減衰曲線}$ $y=e^{-x}\sin x$



(1) $\begin{cases} I_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\sin x\,dx \\ J_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\cos x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_k+J_k \\ I_k-J_k \end{cases}$

$\boxed{解法}$ 積の微分 OR 部分積分 部分ミスる

オススメ

$(e^{-x}\sin x)'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$ $=$ △

$(e^{-x}\cos x)'=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$ $=-$ □

$I_k+J_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \boxed{e^{-x}(\sin x+\cos x)}dx$

$=-\left[e^{-x}\cos x\right]_{(k-1)\pi}^{k\pi}$ $\quad \boxed{\cos k\pi=(-1)^k}$

$=-e^{-k\pi}\cdot(-1)^k+e^{-(k-1)\pi}\cdot(-1)^{k-1}$

$=(-1)^{k-1}\left(e^{-k\pi}+e^{-(k-1)\pi}\right)$ //

$I_k-J_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}(\sin x-\cos x)dx$ $\quad \boxed{\sin k\pi=0}$

$=-\left[e^{-x}\sin x\right]_{(k-1)\pi}^{k\pi}$

$=0$

注 $\{I_k+J_k\}$ は $\boxed{等比}$ 数列

$I_k+J_k=(-1)^{k-1}\times e^{-(k-1)\pi}\left(e^{-\pi}+1\right)$

$=\underbrace{\left(-e^{-\pi}\right)^{k-1}}_{公比}\cdot\underbrace{\left(e^{-\pi}+1\right)}_{初項}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|dx=\boxed{?}$

$\int_0^{n\pi}=\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}+\int_{2\pi}^{3\pi}+\cdots+\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}$ に着目

$(与式)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}|\sin x|dx$

$S_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}|\sin x|dx$ 符号（k の偶奇）不明

$=\left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\sin x\,dx\right|$ 全符号

$=|I_k|=\frac{1}{2}\left\{e^{-k\pi}+e^{-(k-1)\pi}\right\}$

$=\frac{1}{2}e^{-(k-1)\pi}\left(e^{-\pi}+1\right)$

$=\underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{-\pi}+1\right)}_{初項}\times\underbrace{\left(e^{-\pi}\right)^{k-1}}_{公比}$

$(与式)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k$ は.

初項 $\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$, 公比 $e^{-\pi}$ の

無限等比級数.

初項 $\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)\neq 0$ だが

公比 $|e^{-\pi}|<1$ より収束

その和: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)}{1-e^{-\pi}}$

$=\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$ //

$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx=\boxed{?}$ (1)を誘導として用いる

$\int_0^{n\pi}=\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}+\int_{2\pi}^{3\pi}+\cdots\cdots+\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}$ に着目

$(与式)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$

$S_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$ とおくと　符号(kの偶奇)不明

$=\left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\sin x\,dx\right|$ 定符号

$=|I_k|=\frac{1}{2}\{e^{-k\pi}+e^{-(k-1)\pi}\}$ ← (1)の式の$\frac{和}{2}$

$=\frac{1}{2}e^{-(k-1)\pi}(e^{-\pi}+1)$

$=\underbrace{\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)}_{初項}\times(\underbrace{e^{-\pi}}_{公比})^{k-1}$

$(与式)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k$ は.

初項 $\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$, 公比 $e^{-\pi}$ の無限等比級数.

減衰

初項 $\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)\neq 0$ だが

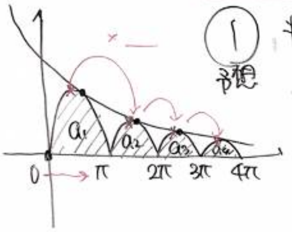
公比 $|e^{-\pi}|<1$ より収束

その和: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k=\dfrac{\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)}{1-e^{-\pi}}$ ← $\dfrac{a}{1-r}$

$=\dfrac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$

補足 $\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx=\boxed{?}\ 誘導なしなら…}$

$y=e^{-x}|\sin x|$ は減衰曲線 ⇨ ヨコ 等差　タテ 等比　π　$\boxed{e^{-\pi}}$ 予想できる



① 予想 $f(x)=e^{-x}|\sin x|$ とおくと

$f(x+\pi)=e^{-(x+\pi)}\cdot|\sin(x+\pi)|$

$=e^{-\pi}\times e^{-x}|\sin x|$

$=\boxed{e^{-\pi}}\times f(x)$

② 工夫 $a_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$ とおく.

$\{a_n\}$が等比数列であることを証明

$\begin{cases}x:(n-1)\pi\to n\pi\\ t:0\longrightarrow\pi\end{cases}$ となる置換 $\boxed{t=x-(n-1)\pi}$ を考える

$a_n=\int_0^{\pi} e^{-t-(n-1)\pi}|\sin(t+(n-1)\pi)|\times dt$

$e^{-t}\times e^{-(n-1)\pi}$

$= e^{-(n-1)\pi}\cdot\boxed{\int_0^{\pi} e^{-t}|\sin t|\,dt}=a_1$

$a_n=\underbrace{a_1}_{初}\times(\underbrace{e^{-\pi}}_{公比})^{n-1}$

$a_1=\int_0^{\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$

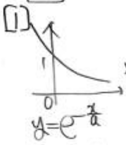
$=\cdots\cdots=\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})$ より

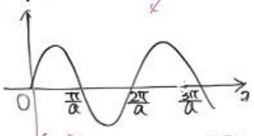
⋮ 以下略

③ そのまま(略)

過去問めぐり 減衰

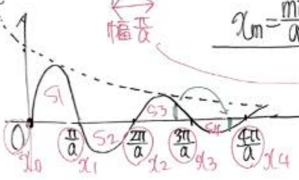
$\boxed{1}$ $a>0$, $f(x)=e^{-\frac{x}{a}}\sin ax$





$x_m=\dfrac{m\pi}{a}$ ①

⇨



全積分 ± [2] $S_k=\int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-\frac{x}{a}}|\sin ax|\,dx$

実は等比数列であり, 公比は $\boxed{?}$

① 予想(検) $f\left(x+\frac{\pi}{a}\right)=e^{-\frac{x+\frac{\pi}{a}}{a}}\cdot\sin(ax+\pi)$

$=e^{-\frac{x}{a}-\frac{\pi}{a^2}}\times(-\sin x)$

$=\boxed{-e^{-\frac{\pi}{a^2}}}\underbrace{e^{-\frac{x}{a}}\sin x}_{f(x)}$

② 工夫 S_k を $\boxed{t=x-\frac{(k-1)\pi}{a}}$ で置換する

$S_k=\int_0^{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{t}{a}-\frac{(k-1)\pi}{a^2}}\sin(at+(k-1)\pi)\,dt$

$=e^{-\frac{(k-1)\pi}{a^2}}\times(-1)^{k-1}\int_0^{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{t}{a}}\sin at\cdot dt$

$=(\underbrace{-e^{-\frac{\pi}{a^2}}}_{公比})^{k-1}\times S_1$　$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{a}$

③ 置換せずに、そのまま計算

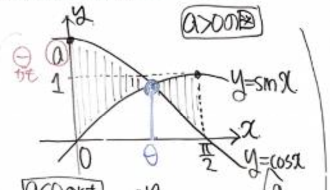
→ プリント参照

614

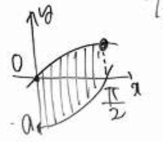
$f(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \sin x - a\cdot\cos x \right| dx$

差の絶対値に着目して図示

$a>0$の図

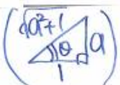


$a<0$のとき



(i) $a \leqq 0$のとき

$f(a)=\left[-\cos x - a\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -a+1$



$(f'(a)=-1<0)$

(ii) $a>0$のとき

交点⇒連立　$\sin x = a\cos x$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = a$ —⊛

⊛の$0<x<\frac{\pi}{2}$での解をθとおくと　$\tan\theta = a$

$f(a)=\int_0^{\theta} (a\cos x - \sin x)dx + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - a\cos x)dx$

$= \left[a\sin x + \cos x\right]_0^{\theta} + \left[-\cos x - a\sin x\right]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}$

⊕　⊖

$= 2(a\sin\theta + \cos\theta) - a - 1$

$= 2\left(a \times \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right) - a - 1$

$= 2\sqrt{a^2+1} - a - 1$

$f'(a) = (a^2+1)^{-\frac{1}{2}} \times 2a - 1 = \frac{2a}{\sqrt{a^2+1}} - 1$

$f'(a)=0$ となるのは $a>0$ より $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$

a	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(a)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(a)$	↘		↘		↗

$a=\frac{1}{\sqrt{3}}$で最小値

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - 1$

$= \sqrt{3} - 1$ //

615

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$

(1) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\cdot dx = \frac{\pi}{4}$,

$-\frac{-\sin x}{\cos x}$　$\frac{f'}{f}$

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx = \left[-\log|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\log 2$

(2) $I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^n x + \tan^{n+2} x)dx$

差2

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \times (1+\tan^2 x)dx$

$f^n \times f'$

$= \left[\frac{(\tan x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}$ ■

(3) $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ を示す。

《考察》被積分関数の評価を用いてもよい

$\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x}$

(2)は誘導　$I_n \geqq 0$, $I_{n+2} \geqq 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ とあわせて

$\lim_{n\to\infty} I_{n+2} = 0$, $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ ///

615

ライプニッツ　　2倍 メルカトール

(4) $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{2k-1}$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{2k}$

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx$,　$I_0 = \frac{\pi}{4}$, $I_1 = \frac{1}{2}\log 2$

$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ ← 漸化式

(i) S_nを作る　$n+1 = 2k-1$ とおくと

$I_{2k-2} + I_{2k} = \frac{1}{2k-1}$

$(-1)^{k-1}(I_{2k-2} + I_{2k}) = (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{2k-1}$

$k=1,2,3,\cdots,n$ でたす

① $+(I_0 + I_2) = (-1)^0 \times \frac{1}{1}$

② $-(I_2 + I_4) = (-1)^1 \times \frac{1}{3}$

③ $+(I_4 + I_6) = (-1)^2 \times \frac{1}{5}$

⋮

ⓝ $(-1)^{n-1}(I_{2n-2} + I_{2n}) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1}$

$I_0 - (-1)^{n-1} \cdot I_{2n-2} = \boxed{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1}} = S_n$

極限をとる $(n\to\infty)$

$\lim_{n\to\infty} I_{2n-2} = 0$ より

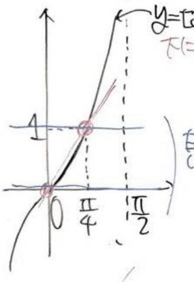
$\lim_{n\to\infty} \boxed{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1}} = I_0 = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$

(ii) T_nを作る　$n+1 = 2k$ とおくと

$I_{2k-1} + I_{2k+1} = \frac{1}{2k}$　以下同じ

《補足》(3) $\lim_{n\to\infty} I_n=0$ を、評価で解くと ◎　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$



$0\le x\le\frac{\pi}{4}$ で

$0\le \cancel{\tan x}\le 1$ → このまま積分

上から

$0\le\tan x\le\frac{4}{\pi}x$ ← 厳しい評価

$0\le\tan^n x\le\left(\frac{4x}{\pi}\right)^n\le 1^n$　　$\theta=\frac{4x}{\pi}$ とおく　$\frac{d\theta}{dx}=\frac{4}{\pi}$

$0<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4x}{\pi}\right)^n dx$

$=\int_0^1\theta^n\times\frac{\pi}{4}d\theta=\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{n+1}\to 0$

$0\le\lim_{n\to\infty}I_n\le 0$

はさみうちの原理より

$\lim_{n\to\infty}I_n=0$ //

616 抽象関数の練習

チャレ(77) 減衰の練習

78講

チャレ(78) ちゃんとやる 予習

【質問対応】

598 n:自然数

(1) $\underbrace{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}}_{2n個}=\underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n個}$

(i) n=1のとき (左辺)$=1-\frac{1}{2}$, (右辺)$=\frac{1}{2}$ より成立

(ii) n=kのとき成り立つとする。つまり

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}$

Aim $n=k+1$

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$ ← 作る

× $=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$

両辺に $\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$ をたす

(左辺):

(右辺)$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$

不要

$-\frac{1}{2k+2}+\frac{1}{k+1}$

$=\frac{-1+2}{2k+2}$

$=\frac{1}{2k+2}$

$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$

よって n=k+1 のときも成立　(i)(ii)より全ての自然数で成立