複素数平面

$\boxed{\text{複素数}}$　$z=\underbrace{a}_{\text{実部}}+\underbrace{b}_{\text{虚部}}i$　(a, bは実数)と表される数

　$\boxed{\text{共役複素数}}$　$\overline{z}=a-bi$

　$\boxed{\text{絶対値}}$　$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

　$\boxed{\text{純虚数}}$　$z=bi$　(bは実数) と表せる数

複素数平面の全体像

Ⅰ．複素数をzのまま扱う（共役）

Ⅱ．$z=x+yi$（直交）

Ⅲ．$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　（極）

Ⅰ．複素数をそのまま扱う

共役（バー）の性質

① $\overline{\overline{z}}=z$

② $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$　（複号同順）

③ $\overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$，$\overline{z^n}=\overline{z}^n$

④ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

⑤ 実数aに対して，$\overline{a}=a$

$$|z|^2=z\cdot\overline{z}$$

｜絶対値｜^{2}＝共役との積

zが実数　$\Leftrightarrow$　$\overline{z}=z$

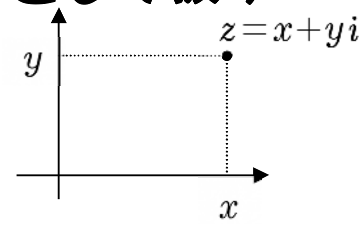
zが純虚数　$\Leftrightarrow$　$\overline{z}=-z$

実部と虚部の取り出し公式

［記号］$z=a+bi$　に対して，$\overline{z}=a-bi$　より，

　実部　$\mathrm{Re}\,z=a=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$，　虚部　$\mathrm{Im}\,z=b=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

Ⅱ．複素数を「直交座標」として扱う



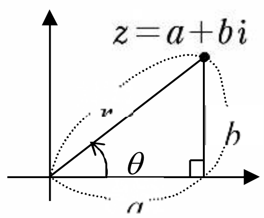
複素数平面　複素数 $z=x+yi$ を
xy 平面上の点 $(x,\ y)$ に対応させた平面

複素数＝位置ベクトル

$\mathrm{A}(\alpha)$ とすると，α は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を表す。

Ⅲ．複素数を「極座標」として扱う

極形式とは



$$\begin{cases} r=\sqrt{a^2+b^2}=|z| & \leftarrow \text{絶対値} \\ \theta=\arg z & \leftarrow \text{偏角} \end{cases}$$

とすると，

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　←極形式

と表せる。

複素数の積

$$z_1\times z_2=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\times r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

複素数の商

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

ド・モアブルの定理

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

複素数と図形

$$|\alpha| = \mathrm{OA}$$

絶対値　＝原点からの距離

$$|\beta - \alpha| = \mathrm{AB}$$

差の絶対値　＝　二点間距離

複素数の円

中心が $\mathrm{A}(\alpha)$，半径が r の円上の点 $\mathrm{P}(z)$ とすると，

$$\left| z - \underbrace{\alpha}_{\text{中心}} \right| = \underbrace{r}_{\text{半径}}$$

複素数の積と回転（１）

$w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおく。

$\mathrm{O}(0)$, $\mathrm{P}(z)$ とすると，

点 P を点 O を中心に θ 回転，

r 倍拡大（縮小）した点を Q とすると，

Q の表す複素数は zw である。

複素数の積と回転（２）

$w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおく。

$\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{P}(z)$, $\mathrm{Q}(z')$ とすると，

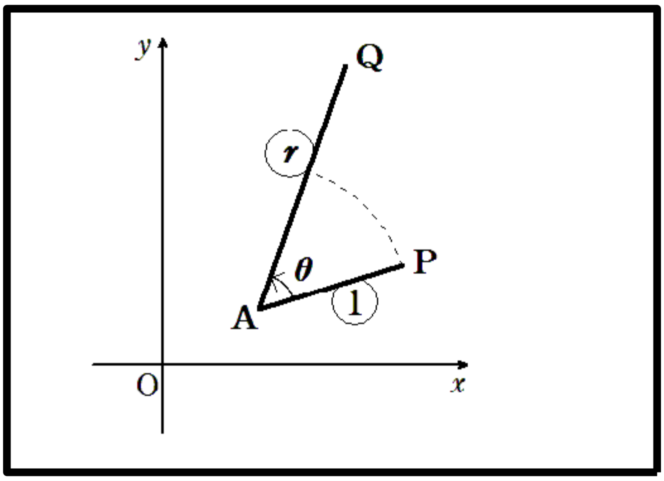
点 P を点 A を中心に θ 回転，

r 倍拡大（縮小）した点を Q とすると，

関係式

$$z' - \alpha = (z - \alpha)w$$

が成り立つ



談話室マロニエ　数学 QUIZ　複素平面

A 問題

複素数　$z = \underbrace{a}_{\text{実部}} + \underbrace{b}_{\text{虚部}} i$ （a, b は実数)と表される数

共役複素数　$\overline{z} = \boxed{\text{ア}}$

絶対値　$|z| = \boxed{\text{イ}}$

純虚数　$z = bi$ （b は実数）と表せる数

絶対値と共役の関係　次の公式を完成させせよ。公式でないものには×をつけよ。

共役の性質

$\overline{\overline{\alpha}} = \boxed{\text{ウ}}$

$\overline{\alpha+\beta} = \boxed{\text{エ}}$

$\overline{\alpha\times\beta} = \boxed{\text{オ}}$,

$\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)} = \boxed{\text{カ}}$

絶対値の性質

$|\alpha+\beta| = \boxed{\text{キ}}$

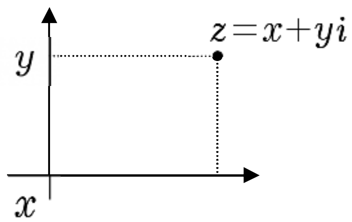
$|\alpha\cdot\beta| = \boxed{\text{ク}}$

$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \boxed{\text{ケ}}$

共役と絶対値をつなぐ公式　$\boxed{\text{コ}}$

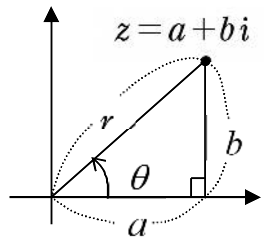
複素数平面　複素数 $z = x+yi$ を

xy 平面上の点 (x, y) に対応させた平面



極形式

右図のとき，$z = a+bi = \boxed{\text{サ}}$　←r, θ を用いて



$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \boxed{\text{シ}}$

$\dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta} = \boxed{\text{ス}}$

n を整数とするとき，$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \boxed{\text{セ}}$　← $\boxed{\text{ソ}}$ の定理

複素数平面と図形

$\mathrm{O}(0), \mathrm{A}(\alpha), \mathrm{B}(\beta)$ とするとき，次のものを複素数 α, β と m, n の式で表せ。

線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の表す複素数 $z=$ ア

$\mathrm{OA}=$ イ，$\mathrm{AB}=$ ウ，

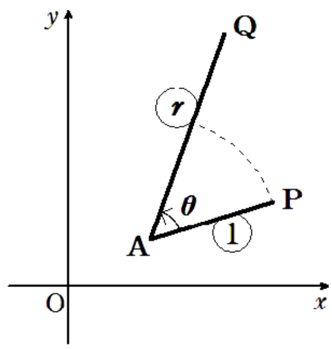
中心が $\mathrm{A}(\alpha)$，半径が r の円上の点を $\mathrm{P}(z)$ とすると，エ が成り立つ。

点 $\mathrm{O}(0)$ の周りに点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を，θ 回転，r 倍に拡大縮小した点を $\mathrm{B}(\beta)$ とすると，

$\beta=$ オ が成り立つ。

点 $\mathrm{A}(\alpha)$ の周りに点 $\mathrm{B}(\beta)$ を，θ 回転，r 倍に拡大縮小した点を $\mathrm{C}(\gamma)$ とすると，

$\gamma=$ カ が成り立つ。



B 問題

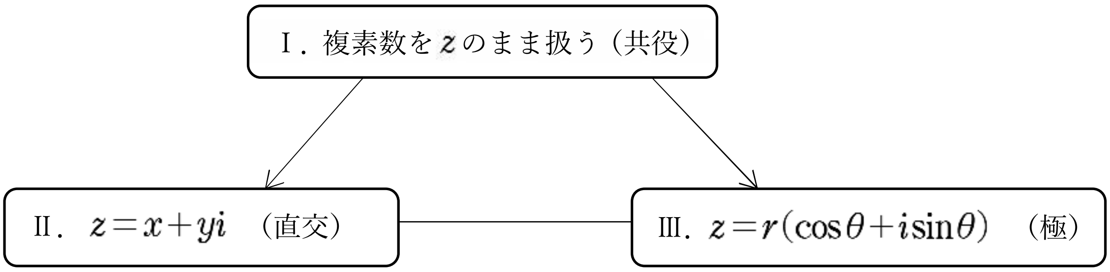
実数条件

虚数条件

実部，虚部の取り出し公式

C 問題

複素数平面の全体像



【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより

標準問題

③標-1-1

$\left|\dfrac{z-2i}{1+2iz}\right|=1$ のとき，$|z|$ の値を求めよ。

③標-1-2

（1）複素数 α が $|\alpha|=1,\ |\alpha+i|=\sqrt{3}$ を満たすとき，α の値を求めよ。

（2）【練習用】$|z|=5,\ z+\overline{z}=2$ であるような複素数 z を求めよ。

③標-1-3

$z+\dfrac{4}{z}$ が実数であり，かつ $|z-2|=2$ であるような複素数 z を求めよ。

③標-1-4

$\left(1+\sqrt{3}\,i\right)\left(1+i\right)$ を計算し，これを利用して $\cos 105^\circ$ の値を求めよ。

③$\boxed{\text{標-1-5}}$

$z=\dfrac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}+i}$ とするとき，z^5 の値を求めよ。

③$\boxed{\text{標-1-6}}$

$z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$ を満たす複素数について

(1) z の値を求めよ　　　(2) $z^{100}+\dfrac{1}{z^{100}}$ の値を求めよ。

③$\boxed{\text{標-1-7}}$

$z^3=8i$ を満たす複素数 z を求めよ。

③$\boxed{\text{標-1-8}}$

$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　等式 $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=x^5-1$ が成り立つことを示せ。

(2)　α は方程式 $x^5=1$ および $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ の解となることを示せ。また，$\dfrac{1}{\alpha}$ を極形式で表せ。

(3)　$\beta=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ とおくとき，(2)から β は方程式 $x^2+x-1=0$ の解となることを示し，これを用いて $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ の値を求めよ。

③$\boxed{\text{標-1-9}}$

$\alpha=-1+2\sqrt{3}\,i, \beta=-2+\sqrt{3}\,i$ を複素数平面上の 2 点とする。点αを中心として，点βを反時計回りに$\dfrac{\pi}{6}$回転して得られる点をγとするとき，γを求めよ。

③$\boxed{\text{標-1-10}}$

複素数平面上で，複素数$1+2i, 3$を表す点をそれぞれ B，C とする。

(1)　BC を一辺とする正三角形 ABC の頂点 A を表す複素数を求めよ。

(2)　BA，BC を二辺とする平行四辺形 ABCD の点 D を表す複素数を求めよ。

③$\boxed{\text{標-1-11}}$

(1)　複素数平面上の 3 点$0, z, z^2$を頂点とする三角形が正三角形となるような複素数zをすべて求めよ。

(2)　aを実数，zを複素数とする。複素数平面上で，a, z, z^2, z^3が表す 4 点が，ある正方形の 4 頂点になっているとする。ただし，aとz^2が表す頂点は対角線上にあるとする。このようなaとzの値をすべて求めよ。

③$\boxed{\text{標-1-12}}$

複素数α, βは$\alpha^2-2\alpha\beta+4\beta^2=0$，$|\alpha-2\beta|=4$の関係を満たす。複素数平面上に，O（原点），A$(\alpha)$, B$(\beta)$の 3 点をとる。三角形 AOB の$\angle$AOB の値を求めよ。また，三角形 AOB の面積の値を求めよ

③ 標-1-13

複素数 $z=1+2i$ とする。複素数平面上で，1, z, z^2 を表す点をそれぞれ A，B，C とするとき，∠BAC の大きさと三角形 ABC の面積を求めよ。

③ 標-1-14

異なる複素数 α, β, γ が $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma=0$ をみたすとき，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の値を求めよ。また, 複素数平面上で, 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする△ABC はどのような三角形か。

③ 標-1-15

（1）　複素数平面上の 3 点 α, β, γ が同一直線上にあるための必要十分条件は $\dfrac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}$ が実数であることを示せ。

(2)　3 個の複素数 $-1, iz, z^2$ が同一直線上にあるための条件を求めよ。

③ 標-1-16

複素数 z が $|z+3-4i|=2$ を満たすとき，$|z|$ の最大値と最小値を求めよ。

③$\boxed{\text{標-1-17}}$

2つの複素数zとwの間に，$w=\dfrac{z+i}{z+1}$（ただし，$z+1\neq0$）なる関係がある。

(1)　zが複素数平面上の虚軸上を動くとき，wの軌跡を求めよ。

(2)　zが複素数平面上の原点を中心とする半径1の円周上を動くとき，wの軌跡を求めよ。

③$\boxed{\text{標-1-18}}$

複素数z, wの間に$zw=1$という関係があるとする。複素数z, wを$z=x+yi$（x, yは実数），$w=u+vi$（u, vは実数）と表したとき

(1)　x, yをu, vを用いて表せ。

(2)　複素数zが，複素数平面上の点$z_1=1$と点$z_2=i$を結ぶ線分上を動くとき，複素数wはどのような図形を描くかを，複素数平面上に図示せよ。

発展問題

③発-1-1

xy 平面上に 3 点 A $(-2a\,,\,0)$, B $(2b\,,\,0)$, C $(0\,,\,2c)$ がある（ただし a, b, c は正の実数）。線分 AB を斜辺とする直角二等辺三角形を三角形 ABC の外部にとり，その直角の頂点を D とする。同様に線分 BC，CA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形を三角形 ABC の外部にとり，その直角の頂点をそれぞれ E，F とする。以下の問に答えよ。

(1)　点 D，E，F それぞれの座標を a，b，c を用いて表せ。
(2)　直線 CD と直線 EF が直交することを示せ。
(3)　線分 CD と線分 EF の長さが等しいことを示せ。

③発-1-2

複素数平面上で，方程式 $(1-2i)z+(1+2i)\overline{z}=20$ の表す直線を l とする。点 $z=x+iy$（x，y は実数）が l 上にあるとき，y を x で表せば $y=$ $\boxed{(カ)}$ である。原点を中心とする円が直線 l と点 α で接しているならば，α の表す複素数は，$\alpha=$ $\boxed{(キ)}$ である。また，このとき 2 次方程式 $x^2+px+q=0$（p，q は実数）が α を 1 つの解としてもつならば，$p=$ $\boxed{(ク)}$，$q=$ $\boxed{(ケ)}$ である。

③発-1-3

$\alpha=1+2i$，$\beta=\dfrac{-1+i}{2}$，$\gamma=\dfrac{\alpha}{\beta}$ とし，複素数平面において，3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ を通る円を D とする。

(1)　円 D の中心と半径を求めよ。
(2)　点 $P(z)$ が円 D の周上を動くとき，$|z|$ の最大値を求めよ。

③発-1-4

複素数平面上で，点 z が 2 点 $1-\dfrac{i}{2}$，$-\dfrac{1}{2}+i$ を通る直線上を動くとき，$\dfrac{1}{z}$ はどのような図形をえがくか。

③発-1-5

複素平面上に 3 点 z，z^2，z^3 がこの順に時計回りに位置し，正三角形の 3 頂点をなすとき，

$z=\dfrac{-\boxed{\text{ア}}-\sqrt{\boxed{\text{イ}}}\,i}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。また，この三角形の三辺の長さの和は，$\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である。

③発-1-6

複素数平面において，3 つの複素数

$z_1=1+i$，$z_2=-1+3i$，$z_3=2+2i$

が表す点をそれぞれ，A，B，C とするとき，3 点 A，B，C を頂点とする平行四辺形の残りの頂点 P を表す複素数を求めると，$\boxed{\text{ア}}$ となる。さらに，頂点 P を表す複素数を極形式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ の形（ただし，$r>0$，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$）で表すと，$\boxed{\text{イ}}$ となる。

③発-1-7

複素数平面上の点 $P_n(z_n)$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ が関係式
$z_{n+1}=7+i+iz_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$
によって与えられている。

$z_{n+1}=7+i+iz_n$ を変形すると
$z_{n+1}-\boxed{(キ)}=i(z_n-\boxed{(キ)})$
となるから，点 $P_n(z_n)$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ のうち異なるものは有限個であり，その個数を m とすると，
（ｉ）　$z_1=\boxed{(キ)}$ のとき　$m=\boxed{(ク)}$
（ⅱ）　$z_1\neq\boxed{(キ)}$ のとき　$m=\boxed{(ケ)}$
であることがわかる。

（ⅱ）のとき，異なる $\boxed{(ケ)}$ 個の点は同一円周上にある。その円の半径が 2 であるとき，$|z_1|$ が最大となるような z_1 は $z_1=\boxed{(コ)}$ である。

③発-1-8

複素数平面上で，$z_0=0$ が表す点を P_0，$z_1=2+4i$ が表す点を P_1 とする。いま線分 P_0P_1 の中点を Q_1 とし，点 P_1 を中心に点 Q_1 を 90° 回転した点を $P_2(z_2)$ とする。P_2 を表す複素数 z_2 を求めると $z_2=\boxed{(3)}$ である。さらに線分 P_1P_2 の中点を Q_2 とし，点 P_2 を中心に Q_2 を 90° 回転した点を $P_3(z_3)$ とする。この操作を続け，線分 $P_{n-1}P_n$ の中点を Q_n とし，P_n を中心に Q_n を 90° 回転した点を $P_{n+1}(z_{n+1})$ とする。このとき，複素数 $2^{100}(z_{100}-z_{99})$ の値を求めると $\boxed{(4)}$ である。

③発-1-9

複素数平面上の原点 O と 3 点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(2+i)$ を頂点とする四角形 OABC が長方形で，OA : OC = 2 : 1 であるとする。複素数 α の実部が正であるとき，$\alpha=\boxed{(3)}$ であり，複素数 β の偏角を θ とすると $\sin\theta=\boxed{(4)}$ である。

③発-1-10

a，b，cを複素数とする3次方程式$z^3+az^2+bz+c=0$の3つの解が，複素数平面上でちょうど正三角形Kの3つの頂点になっているとする。Kの重心をmとするとき，次の問いに答えよ。

問1　a，bをmで表せ。

問2　Kの2つの頂点がちょうど実軸上にあるとき，cをmで表せ。

問3　Kの外接円の半径をrとする。$|a|<2$，$|c|>2$のとき，$r>1$であることを示せ。

③発-1-11

複素数平面上に，原点Oと3点α，β，γがある。$\alpha=2+i$，$\angle\alpha\mathrm{O}\beta=45^\circ$，$\angle\mathrm{O}\alpha\beta=60^\circ$，$\angle\alpha\mathrm{O}\gamma=90^\circ$，$|\alpha|=|\gamma|$であり，$\beta$と$\gamma$の虚部はともに正である。

このとき，$\gamma=$ (ｴ) ，また$|\beta|$は$|\alpha|$の (ｵ) 倍で，$\beta=$ (ｶ) である。さらに，複素数wが線分Oγ上にあり，四角形O$\alpha\beta w$がある円に内接しているとき，$|w|$の値は (ｷ) である。