zemik2020-07-27（board）

42講

329 $\sum_{k=1}^{10}(3k-1)$, $\sum_{k=1}^{12}(-4k+14)^2$

330 385, n^2, $n(2n^2+4n+3)$ Σ公式

$4(2^n-1)$ ← 具体化（初項公式）

331 $-\frac{1}{3}n(4n^2-27n-67)$

$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

n=1などで検算

$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ ← 〇

(1) $S_n=n^2+1$

(2) $S_n=n^2-3n$

332 (1) $a_n=2n^2-1$

(2) $a_n=2^n+3$

333 (1) $a_n=\begin{cases}2 & (n=1)\\ 2n-1 & (n\geqq 2)\end{cases}$

(2) $a_n=2n-4$

(3) $a_n=2\cdot 3^{n-1}+1$

334 (1) BBB $\frac{n}{3n+1}$

(2) 有理化 $\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$

(3) BBB $1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

332 階差の公式

$b_n=a_{n+1}-a_n$

$\Rightarrow a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$ ※ $(n\geqq 2)$

※は n=1のとき ~~成り立たないことがある~~ 必ず成り立つ

証 困難

333 和から一般項

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$

$\Rightarrow\begin{cases}a_1=S_1 & \text{明示}\\ a_n=S_n-S_{n-1} & (n\geqq 2)\ ※\end{cases}$

※が n=1でも成立

⇕

$\boxed{S_0=0}$

※に n=1を代入 $a_1=S_1-\boxed{S_0}$ ありえない

禁止

和から一般項の証明

$S_n=\underbrace{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}}_{S_{n-1}}+a_n$

階差の公式の証明

$\boxed{a_{n+1}-a_n=b_n}$

① $a_2-a_1=b_1$

② $a_3-a_2=b_2$

③ $a_4-a_3=b_3$

$\vdots$

(n-1) $a_n-\cancel{a_{n-1}}=b_{n-1}$

Ⓝ ~~$a_{n+1}-a_n=b_n$~~

$a_n-a_1=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}$

$a_1\ a_2\ a_3\cdots a_{n-1}\ a_n$

$b_1\ b_2\ b_3\ \ b_{n-1}$

Σ記号化 ⇓

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k\ (n\geqq 2)$

一般的には $b_n=a_{n+1}-a_n$

2qiz

$b_n=a_n-a_{n-1}$ とおくと

a_1, b_k

$\Rightarrow a_n=\boxed{a_1+\sum_{k=2}^{n}b_k\quad(n\geqq 2)}$

~~① $b_1=a_1-a_0$~~

② $b_2=\cancel{a_2}-a_1$

③ $b_3=\cancel{a_3}-a_2$

Ⓝ $b_n=a_n-\cancel{a_{n-1}}$

$\sum_{k=1}^{n-1}b_{k+1}$

333 和から一般項

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$

$\Rightarrow\begin{cases}a_1=S_1 & \text{明示}\\ a_n=S_n-S_{n-1} & (n\geqq 2)\ ※\end{cases}$

※が n=1でも成立

⇕

$\boxed{S_0=0}$

※に n=1を代入 $a_1=S_1-\boxed{S_0}$ ありえない

禁止

334 数列の和の計算（Σ計算）

① 等差の和，等比の和 ⇨ 公式

② $\sum_k$（kの3次以下）⇨ Σ公式

③ 等差×等比の和 ⇨ かけずらし

④ 階差に直せる式

⑤ $\boxed{\sum {}_nC_k \Rightarrow \text{二項定理}}$

(1) BBB (2) 有理化

(3) BBB パズル的

(3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$　~~$\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k+1)}{\sum_{k=1}^{n}k^2(k+1)^2}$~~　$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\neq\frac{a+c}{b+d}$

$\frac{?}{k^2}\triangle\frac{?}{(k+1)^2}$ 型に直す

$\frac{1}{k^2}\triangle\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2}=\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

ダメなら $\frac{ak+b}{k^2}-\frac{a(k+1)+b}{(k+1)^2}$ とおく

$(与式)=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k^2}\triangle\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$

$=\left\{\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right\}+\left\{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right\}+\left\{\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right\}$

$\cdots\cdots+\left\{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}$

$=1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ //

演習 (1) $\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!=\boxed{?}$

階差型に直せるはず

Hint $\boxed{(n+1)!=(n+1)\times n!}$

(例) $10!=10\times 9!$

$\sum_{k=1}^{n}k\times k!$

$=\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)-1\}\cdot k!$

$=\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)!\triangle k!\}$

$=(2!-1!)$

$+(3!-2!)$

$+(4!-3!)$

$+\cdots$

$+(n+1)!-n!$

$=(n+1)!-1$ //

(2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\boxed{?}$（練習用）

335 (1) (右辺) $=\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)\{(k+3)-(k-1)\}$

隣接整数の積

$=k(k+1)(k+2)=$(左辺) ■

(2) (1)の式を $k=1,2,3,\cdots,n$ でたす

$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)$

$\triangle(k-1)k(k+1)(k+2)\}$

階差で表せる

$//\ =\frac{1}{4}\left[\{1\cdot2\cdot3\cdot4-0\cdot1\cdot2\cdot3\}\right.$ ゼロ

$+\{2\cdot3\cdot4\cdot5-1\cdot2\cdot3\cdot4\}$

$+\{3\cdot4\cdot5\cdot6-2\cdot3\cdot4\cdot5\}$

$+\cdots$

$\left.+\{n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)\}\right]$

$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$ ■

(3) (2)の式に $\boxed{\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$

等差 $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$ を代入…（略）

《補足》同様に

① $k(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{1}{5}\{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)-(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)\}$

② $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

③ $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$, $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$,

$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ を代入

$(2n+1)(3n^2+3n-1)$

$\therefore \boxed{\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\boxed{?}$ (練習用)

$\boxed{335}$ (1) (右辺) $=\boxed{\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)}\{(k+3)-(k-1)\}$

くくる

隣接整数の積

$=k(k+1)(k+2)=$ (左辺) ■

(2) (1)の式を $k=1,2,3,\cdots,n$ でたす.

$\sum_{k=1}^{n}\boxed{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}$

階差で表せる

$=\frac{1}{4}[\{1\cdot2\cdot3\cdot4-0\cdot1\cdot2\cdot3\}$

$+\{2\cdot3\cdot4\cdot5-1\cdot2\cdot3\cdot4\}$

$+\{3\cdot4\cdot5\cdot6-2\cdot3\cdot4\cdot5\}$

$+\cdots$

$+\{n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+$

ゼロ

$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$ ■

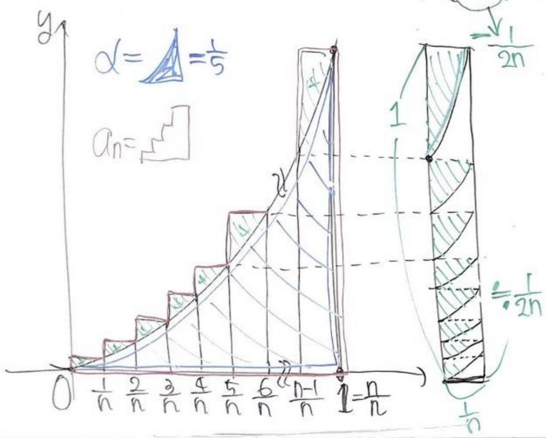
使って よいの?

(3) (2)の式に $\boxed{\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$

等差

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$ を代入… (任

$\boxed{後半}$ Σk^4 を立式せずに解く方法. $b_n=(\alpha-a_n)\times n$



$\boxed{過去問より}$ 2014 東医

$a_n=\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}k^4$

$\boxed{前半}$

区分求積法

$\alpha=\lim_{n\to\infty}a_n$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4$

$=\int_0^1 x^4dx$

$=\frac{1}{5}$

$\frac{k}{n}$

$\alpha=\lim_{n\to\infty}a_n$

㊍代入

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^4}{n^5}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\cdots}{n^5}$

㊍より $\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+$ (nの3次以下)

$\div n^5$

$\boxed{後半}$

$\beta=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}-a_n\right)\times n$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}+\cdots\right)\right\}\times n$

分母に2次以

$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{2n}+\cdots\times n\right)$

ゼロ

$=-\frac{1}{2}$ //