zemik2020-09-15（board）

504 条件 = 必要十分条件のこと

$f(x)$：多項式　これを示す

$f(x)$ が $(x-a)^2$ で割り切れる $\iff f(a)=f'(a)=0$

($\Rightarrow$) $f(x)$が$(x-a)^2$で割り切れるとき

$f(x)=(x-a)^2\cdot Q(x)$ と表せる.

$f'(x)=2(x-a)\cdot Q(x)+(x-a)^2\cdot Q'(x)$より

$f(a)=f'(a)=0$

($\Leftarrow$) $f(a)=f'(a)=0$のとき

$f(x)=(x-a)^2\cdot Q(x)+px+q$ とおくと

$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2\cdot Q'(x)+p$ より

$\begin{cases} f(a)=pa+q=0 \text{ かつ} \\ f'(a)=p=0 \end{cases}$ $\therefore p=q=0$

よって $f(x)$は$(x-a)^2$で割り切れる

2019 $\boxed{5}$ 東医も作れっぽい

チャレ(63) 答 (1) -3, (2) 4　抽象関数に慣れよう

$f(x)$：微分可能

$f(-x)=f(x)+2x$ —— ⊛

$f'(1)=1,\ f(1)=0$

(1) $f'(-1)=\boxed{?}$

⊛の両辺をxで微分　左の合ビ

$f'(-x)\times(-1)=f'(x)+2$

$f'(-x)=-f'(x)-2$

$f'(-1)=-f'(1)-2=-3$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)+f(-x)-2}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{f(x)+\{f(x)+2x\}-2}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{2(f(x)-f(1))+2(x-1)}{x-1}$

$=2f'(1)+2$

$=4$

$\frac{0}{0}$ （約分 ビ分の定ギ）

64講

$\boxed{505}$ (1) $-3\sin(3x+1)$　(2) $\dfrac{1}{1-\sin x}$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$

(3) $\dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}=\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}=2\tan x(1+\tan^2 x)$

$\boxed{506}$ (1) $(1+2x)e^{2x}$　(2) $-e^{-x}(\sin x+\cos x)$

(3) $\dfrac{1}{\tan x}$　*(4) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\left\{\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)\right\}'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$

507 対数微分法　1st は e

$2^x\cdot\log 2$, $x^x\cdot(\log x+1)$, $(\sin x)^x\left\{\log(\sin x)+\dfrac{x\cos x}{\sin x}\right\}$

$\boxed{508}$ $\begin{cases} x=\cos\theta(1+\cos\theta)=\cos\theta+\cos^2\theta \\ y=\sin\theta(1+\cos\theta)=\sin\theta+\sin\theta\cos\theta \end{cases}$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}{-\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta}$

パラメータ関数の微分公式

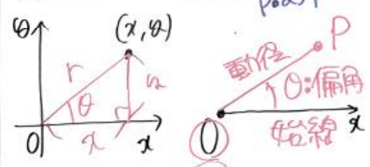
$=-\dfrac{\cos\theta+\cos2\theta}{\sin\theta+\sin2\theta}$

《補足》グラフを描け. 微分でもよいが

$r=1+\cos\theta$ とおくと.

$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ 極座標と直交座標の変換公式

P.234

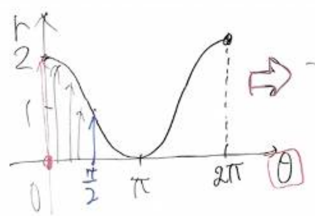


$r^2=x^2+y^2$

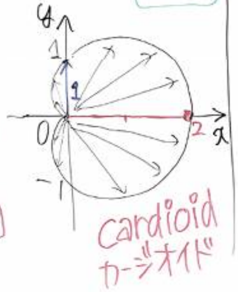
$\boxed{418}$ (2) $r=2\sin\theta$
$r^2=2r\cdot\sin\theta$
$x^2+y^2=2y$
$x^2+(y-1)^2=1$ 円

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, $r \geqq 0$　極形式

$r=1+\cos\theta$ を図示



⇨



cardioid
カージオイド

2018 東医$\boxed{5}$

$(x^2+y^2)^2=x^3-3xy^2$ を図示せよ.

$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ とおく　直交 → 極

(左辺) $=(r^2)^2=r^4$

(右辺) $=r^3(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)$　$1-\cos^2\theta$

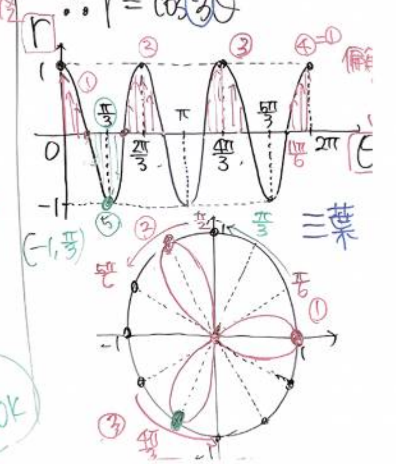
$=r^3(4\cos^3\theta-3\cos\theta)$

$=r^3\cdot\cos3\theta$

極座標 $r\leqq0$もOK

動径

$\therefore r=\cos3\theta$



$\boxed{509}$ (1) $x=\tan y \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx}$ を xの式で

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

逆

(2) $x^2-3xy+y^2=1 \Longrightarrow \boxed{\dfrac{dy}{dx}}=\boxed{?}$

D.I.Y.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}(x^2)=2x \\ \dfrac{d}{dx}(y^2)=\dfrac{d}{dy}(y^2)\times\dfrac{dy}{dx}=2y\cdot\dfrac{dy}{dx} \\ \dfrac{d}{dx}(x\cdot y)=1\times y+x\times\dfrac{dy}{dx} \end{cases}$$ より

$$2x-3\left(y+x\cdot\frac{dy}{dx}\right)+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x-3y=(3x-2y)\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x-3y}{3x-2y}$$

$\boxed{510}$ $f(x)=x^2\cdot e^x$ の $\boxed{\text{第}n\text{次導関数}}$

$\boxed{f^{(n)}(x)}$を求めよ. という問として解く

具体化⇒推定. キハ法

$f^{(1)}(x)=(x^2+2x)e^x$ 0

$f^{(2)}(x)=(x^2+4x+2)e^x$

$f^{(3)}(x)=(x^2+6x+6)e^x$

$f^{(4)}(x)=(x^2+8x+12)e^x$ $n(n-1)=n^2-n$

$\vdots$

$f^{(n)}(x)=(x^2+\boxed{2n}x+\triangle)e^x$ と推定できる

推定が困難なときの解法.

型を推定 ⟹ 漸化式へ.

誘導

$$f^{(n)}(x)=(x^2+a_nx+b_n)\cdot e^x$$

関数列の一種

き $a_1=2$, $b_1=0$とおくと成立

き成り立つとする つまり

$(x)=(x^2+a_kx+b_k)\cdot e^x$ とする

$(x)=(2x+a_k)e^x+(x^2+a_kx+b_k)e^x$

$=\{x^2+(a_k+2)x+(a_k+b_k)\}e^x$

a_{k+1}　b_{k+1}

$_{k+1}=a_k+2$ ← 等差型

$_{k+1}=b_k+a_k$ ← 階差型

おくと $n=k+1$のときも成立

全ての自然数nで成立

$a_n=2n$, $b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}a_k$ $(n\geqq 2)$

$=0+\frac{1}{2}2n(n-1)$

$=n(n-1)$ ← $n=1$のときも成立.

$\boxed{510}$ $f(x)=x^2\cdot e^x$ の $\boxed{\text{第}n\text{次導関数}}$

$\boxed{f^{(n)}(x)}$を求めよ. という問として解く

具体化⇒推定. キハ法 略

$f^{(1)}(x)=(x^2+2x)e^x$ 0

$f^{(2)}(x)=(x^2+4x+2)e^x$

$f^{(3)}(x)=(x^2+6x+6)e^x$

$f^{(4)}(x)=(x^2+8x+12)e^x$ $n(n-1)=n^2-$

$f^{(n)}(x)=(x^2+\boxed{2n}x+\triangle)e^x$ と推定で

推定が困難なときの解法.

型を推定 ⟹ 漸化式へ.

誘導

$f^{(n)}(x)=(x^2+a_nx+b_n)\cdot e^x$

関数列 → 数列 に帰着

の一種

(i) $n=1$のとき $a_1=2$, $b_1=0$とおくと成立

(ii) $n=k$のとき成り立つとする つまり

$$f^{(k)}(x)=(x^2+a_kx+b_k)\cdot e^x \text{ とする}$$

$$f^{(k+1)}(x)=(2x+a_k)e^x+(x^2+a_kx+b_k)e^x$$

$$=\{x^2+\underbrace{(a_k+2)}_{a_{k+1}}x+\underbrace{(a_k+b_k)}_{b_{k+1}}\}e^x$$

$$\begin{cases} a_{k+1}=a_k+2 & \leftarrow \text{等差型} \\ b_{k+1}=b_k+a_k & \leftarrow \text{階差型} \end{cases}$$

とおくと $n=k+1$のときも成立

(i)(ii)より. 全ての自然数nで成立

$$a_n=2n,\quad b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}a_k \ (n\geqq 2)$$

$$=0+\frac{1}{2}2n(n-1)$$

$$=n(n-1) \leftarrow n=1\text{のときも成立.}$$

$\boxed{510}$ $f(x)=x^2\cdot e^x$ の $\boxed{\text{第}n\text{次導関数}}$

$\boxed{f^{(n)}(x)}$を求めよ. という問として解く

具体化⇒推定. キハ法 略

$f^{(1)}(x)=(x^2+2x)e^x$ 0

$f^{(2)}(x)=(x^2+4x+2)e^x$

$f^{(3)}(x)=(x^2+6x+6)e^x$

$f^{(4)}(x)=(x^2+8x+12)e^x$ $n(n-1)=n^2-n$

$f^{(n)}(x)=(x^2+\boxed{2n}x+\triangle)e^x$ と推定できる

推定が困難なときの解法.

型を推定 ⟹ 漸化式へ.

誘導

$f^{(n)}(x)=(x^2+a_nx+b_n)\cdot e^x$

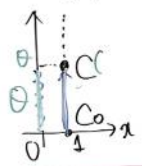
関数列 → 数列 に帰着

の一種

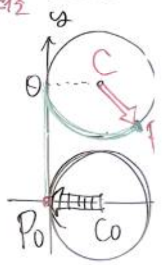
$\boxed{511}$ (1) $\begin{cases} x=1-\cos\theta \\ y=\theta-\sin\theta \end{cases}$　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix}$　$\overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$　$1\cdot\begin{pmatrix} \cos(\pi+\theta) \\ \sin(\pi+\theta) \end{pmatrix}$

半径



P(x, y)とおく.



$\boxed{\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}\text{より}}$

cycloid サイクロイド

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cancel{\frac{\frac{d^2y}{d\theta^2}}{\frac{d^2x}{d\theta^2}}} = \cdots$$

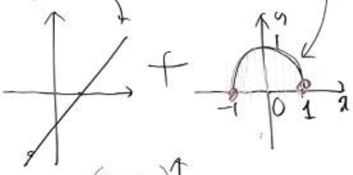
d▨は2回ビブンでは分数扱いできない!!

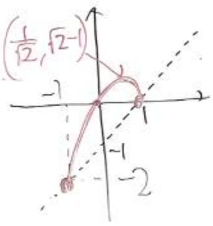
D.I.Y.

【演習】

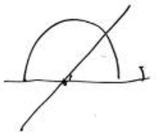
その2. $y=x-1+\sqrt{1-x^2}$ は

$y=x-1$ $\quad$ $y=\sqrt{1-x^2}$





$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}-1\right)$



[6] $f(x)=x-1+\sqrt{1-x^2}$ とおく $(-1 \leqq x \leqq 1)$

$f'(x)=1+\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\times(-2x)$

$=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow {}^{+}\sqrt{1-x^2}=x \geqq 0$

2乗して $1-x^2=x^2$ かつ $x \geqq 0$

$\left[x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$x=\frac{+1}{\sqrt{2}}$

[0] $f(x)=\log(1+\sqrt{1-x^2})-\sqrt{1-x^2}-\log x$. $(0<x<1)$

[準ビ $(\sqrt{1-x^2})'=\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\times(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ より]

$f'(x)=\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\times\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}$

有理化 $\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-(1-x^2)}=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

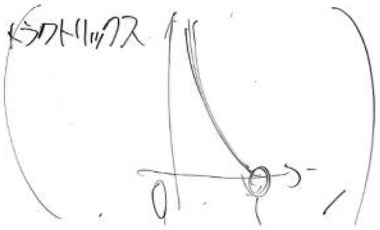
$f'(x)=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^{\cancel{2}}}\times\frac{-\cancel{x}}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}$

$=\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}$

$=\frac{\cancel{\sqrt{1-x^2}}-1+x^2-\cancel{\sqrt{1-x^2}}}{x\sqrt{1-x^2}}$

$=\frac{-(1-x^2)}{x\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}<0$

トラクトリックス



$y=(\sin x)^x$

$\log y=\log(\sin x)^x$

$\quad // \ =x\times\log(\sin x)$

$\frac{y'}{y}=1\times\log(\sin x)$

$\quad +x\times\frac{1}{\sin x}\times\cos x$

$y'=y\times\left\{\log(\sin x)+\frac{x\cdot\cos x}{\sin x}\right\}$