

[LTC] (きのう 2/4)

□ $\vec{a}$: 全v. $\vec{p}$: 重v.

$$|\vec{x}|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}$$

$$|\vec{p}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{p} - 3|\vec{a}|^2 = 0$$

$$(|\vec{p}| + |\vec{a}|)(|\vec{p}| - 3|\vec{a}|) = 0$$

$$(\vec{p} + \vec{a}) \cdot (\vec{p} - 3\vec{a}) = 0$$

$$\vec{p} = -\vec{a} \text{ または } \vec{p} = 3\vec{a}$$

$$(\vec{p} + \vec{a}) \perp (\vec{p} - 3\vec{a}) \text{ かつ}$$

[解1] 平方完成

$$p^2 - 2ap - 3a^2 = (p-a)^2 - 4a^2$$

$$|\vec{p} - \vec{a}|^2 = 4|\vec{a}|^2$$

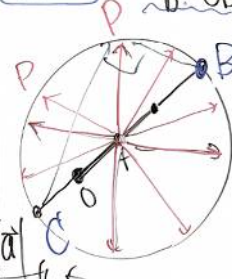
$$|\vec{p} - \vec{a}| = 2|\vec{a}|$$

$$|\vec{OP} - \vec{OA}| = 2|\vec{OA}|$$

$$|\vec{AP}| = 2|\vec{OA}|$$

APCの位置 $\vec{a}$, 半径 $2|\vec{a}|$

$$\vec{XY} = \vec{OX} - \vec{OY}$$



[解2] 因数分解

$$p^2 - 2ap - 3a^2 = (p-3a)(p+a) \text{ を参考にして}$$

$$(\vec{p} - 3\vec{a}) \cdot (\vec{p} + \vec{a}) = 0$$

$$\vec{b} = \vec{OB} = 3\vec{a}, \vec{c} = \vec{OC} = -\vec{a} \text{ とおく}$$

$$(\vec{OP} - \vec{OB}) \cdot (\vec{OP} - \vec{OC}) = 0$$

$$\vec{BP} \cdot \vec{CP} = 0$$

Pは直径BCとある円周上

294

485 A

$$|\vec{AB}|=6, |\vec{BC}|=5, |\vec{CA}|=4$$

$$|\vec{AC}|^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + |\vec{AB}|^2 = 25$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{27}{2}$$

H: $\triangle ABC$ の垂心 = 垂線の交点

$$\vec{AH} = x\vec{AB} + y\vec{AC} \text{ とおく}$$

$$\begin{cases} \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0 \text{ ① から2式とる} \\ \vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0 \text{ ② 垂直} \\ \vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ ③ } \end{cases}$$

$$\vec{AH} = \frac{3}{35}\vec{AB} + \frac{27}{35}\vec{AC}$$

$$\textcircled{1} (x\vec{AB} + y\vec{AC}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = 0$$

$$-36x + \frac{27}{2}(x-y) + 16y = 0$$

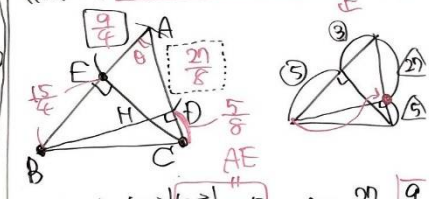
$$\textcircled{2} (x-1)\vec{AB} + y\vec{AC} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$\frac{27}{2}(x-1) + 16y = 0$$

$$\textcircled{3} (x\vec{AB} + (y-1)\vec{AC}) \cdot \vec{AB} = 0$$

$$36x + \frac{27}{2}(y-1) = 0$$

《補足》 内積の図形的意味



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| |\vec{AC}| \cos \theta$$

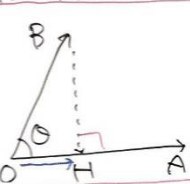
$$\vec{AC} \cdot \vec{AB} = |\vec{AC}| |\vec{AB}| \cos \theta$$

$$\frac{5}{32} \times \frac{9}{5} \times \frac{BH}{HD} = 1 \Rightarrow \frac{BH}{HD} = \frac{32}{9}$$

$$\frac{BH}{HD} = \frac{32}{9}$$

天と地

内積の図形的意味

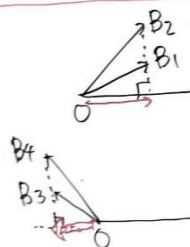


$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| |\vec{OB}| \cos \theta$$

内積 2次元 正射影

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB}_1 = \vec{OA} \cdot \vec{OB}_2 > 0$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB}_3 = \vec{OA} \cdot \vec{OB}_4 < 0$$



(2)



$$\vec{AO} = x\vec{AB} + y\vec{AC} \text{ とおく}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{MO} = 0$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{NO} = 0$$

$$\vec{AO} = \frac{16}{35}\vec{AB} + \frac{4}{35}\vec{AC}$$

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$\vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{AC}$$

《別解》 内積の図形的意味

$$\vec{AB} \cdot \vec{AO} = 18$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{AO} = 8$$

$$\therefore \vec{AO} = x\vec{AB} + y\vec{AC} \text{ とおく}$$

295 $\triangle ABC$. P: 重心

(1) $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = \vec{AC} \cdot \vec{BC}$ を満たす点Pの軌跡

$$\vec{AP} \cdot (\vec{AP} - \vec{AB}) = \vec{AC} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB})$$

$$|\vec{AP}|^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AP} = |\vec{AC}|^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

$$\left| \vec{AP} - \frac{1}{2} \vec{AB} \right|^2 = |\vec{AC}|^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \frac{1}{4} |\vec{AB}|^2$$

$\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AB}$ とする点Mをとる

$$|\vec{AP} - \vec{AM}| = |\vec{AC} - \vec{AM}|$$

$$|\vec{MP}| = |\vec{MC}|$$



$$\left| \vec{AC} - \frac{1}{2} \vec{AB} \right|^2$$

平接成

ABの中点をMとすると

中心M, 半径 $|\vec{MC}|$

の円

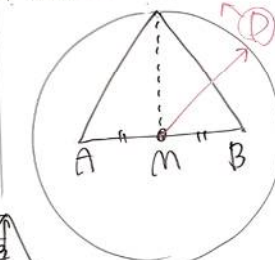


(2) 因数分解にも解ける (LTC 参照)

(2) $\triangle ABC$: 正三角形. $\vec{AP} \cdot \vec{CP}$ の範囲を求める

円は中心がPと定まる

(1) 例. 点Pは中心M, 半径 $|\vec{MC}|$ の円上



$k = \vec{AP} \cdot \vec{CP}$ とおき始まるMCに直す

$$= (\vec{MP} - \vec{MA}) \cdot (\vec{MP} - \vec{MC})$$

$$= |\vec{MP}|^2 - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP} + \vec{MA} \cdot \vec{MC}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{MP}$$

$\vec{MD} = \vec{MA} + \vec{MC}$ とする点Dをとると $|\vec{MD}| = 1$. 296 $\triangle ABC$: 中心O, 半径1の円に内接

$$\therefore \vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{1}{2}$$

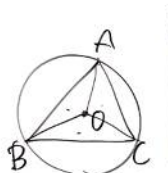
$$k = \frac{3}{4} - \vec{MD} \cdot \vec{MP}$$

$$= \frac{3}{4} - |\vec{MD}| |\vec{MP}| \cos \theta$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta$$

θは任意なので

$$\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \vec{AP} \cdot \vec{CP} \leq \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$



図は2通り

$$5\vec{OA} + 4\vec{OB} + 3\vec{OC} = \vec{0}$$

$$|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = 1$$

$$\triangle ABC = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA$$

$$\triangle OAB \Rightarrow \vec{OC} \text{ 平行}$$

$$5\vec{OA} + 4\vec{OB} = -3\vec{OC}$$

$$|5\vec{OA} + 4\vec{OB}| = 3|\vec{OC}| = 3$$

$$25|\vec{OA}|^2 + 40\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 16|\vec{OB}|^2 = 9$$

$$25 + 40\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 16 = 9$$

$$40\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -22$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{11}{20}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{11}{20}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{11}{20}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{11}{20}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{11}{20}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{11}{20}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{11}{20}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{11}{20}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{11}{20}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{11}{20}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{11}{20}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{11}{20}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{11}{20}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{11}{20}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{11}{20}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{11}{20}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{11}{20}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{11}{20}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{1}{2} |\vec{OA}| |\vec{OB}| \sin \theta = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{3}{10}$$

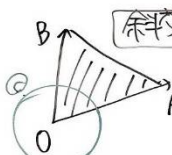
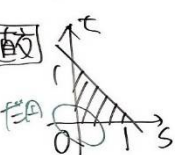
LTC 2/4 → 2/5

2 $|\vec{OA}| = 3, |\vec{OB}| = 2, \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2$

(1) $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$

$$s \geq 0, t \geq 0, s+t \leq 1$$

面積

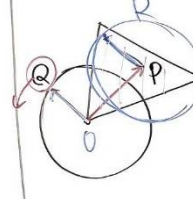


$$\triangle OAB = \frac{1}{2} |\vec{OA}| |\vec{OB}| \sin \theta = 2\sqrt{2}$$

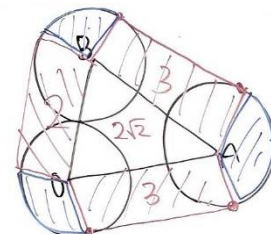
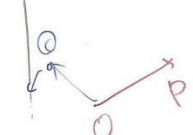
(2) P: $\triangle OAB$ の内部 ← (1) 例

Q: 中心O, 半径1の円周上

R: $\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{OQ}$ 2点の軌跡



またPを固定すると
点Rは4:1:1P 半径1
の円周上を動く
次にPを動かす



$$|\vec{AB}|^2 = \dots = 9$$

$$\therefore |\vec{AB}| = 3$$

$$\therefore |\vec{AB}| = 3$$

$$\therefore |\vec{AB}| = 3$$

$$\therefore |\vec{AB}| = 3$$

$$\therefore |\vec{AB}| = 3$$

$$\therefore |\vec{AB}| = 3$$

$$\therefore |\vec{AB}| = 3$$

$$\therefore |\vec{AB}| = 3$$

$$\therefore |\vec{AB}| = 3$$

$$\therefore |\vec{AB}| = 3$$

$$\therefore |\vec{AB}| = 3$$

$$\therefore |\vec{AB}| = 3$$

$$\therefore |\vec{AB}| = 3$$

$$\therefore |\vec{AB}| = 3$$

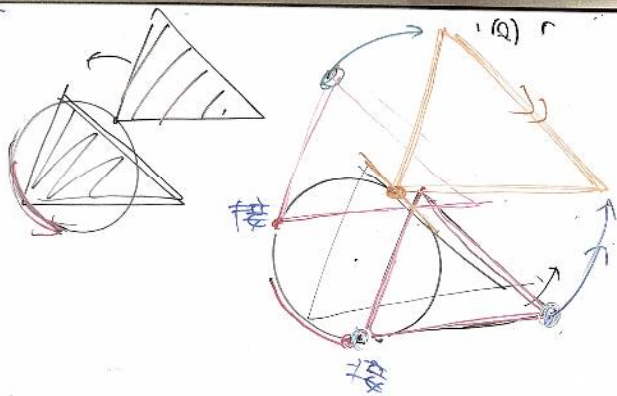
$$\therefore |\vec{AB}| = 3$$

$$\therefore |\vec{AB}| = 3$$

$$\therefore |\vec{AB}| = 3$$

$$\therefore |\vec{AB}| = 3$$

$$8 + 2\sqrt{2} + \pi$$



7.1.1 (3) (1) $\triangle ABC$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{BC} \cdot \vec{CA} = \vec{CA} \cdot \vec{AB}$$

始点をAに統一

$$\vec{AB} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = (\vec{AC} - \vec{AB}) \cdot (-\vec{AC}) = -\vec{AC} \cdot \vec{AB}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} - |\vec{AB}|^2 = -|\vec{AC}|^2 + \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -\vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

$\triangle ABC$ は
正三角形

(2) (1) と同様

IF cyclic symmetry

$$\therefore |\vec{AB}|^2 = |\vec{AC}|^2 = 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

38講 空間ベクトル (1) = 基本は平面と同じ

[297] 平行六面体 = 平行四辺形 3重6枚

$$\vec{AD} = \vec{AB}, \vec{AD} + \vec{AE} = \vec{AB}, \vec{AE} = \vec{AB} - \vec{AD}$$

[298] (1) 2, 0, 2 (2) 略 (3) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$ を示す

[299] 空間内の平面の公式

[300] (1) $\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$

(2) $\vec{OP} = \frac{2}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$

[301] $\vec{OP} = \frac{2}{5}(\vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OC})$

[302]

[299] 点Pが3点A, B, Cで決まる平面上

$$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB} + u\vec{OC}$$

$$\text{と表わす } s+t+u=1$$

条件

必要+充分

これを示す

1点の始点をAにとる

$$\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC} \text{ と表わす}$$

$$\vec{OP} - \vec{OA} = x(\vec{OB} - \vec{OA}) + y(\vec{OC} - \vec{OA})$$

$$\therefore \vec{OP} = \underbrace{(1-x-y)}_s \vec{OA} + \underbrace{x}_t \vec{OB} + \underbrace{y}_u \vec{OC}$$

$$s+t+u=1 \text{ 成立}$$

分類別 #3

[3] $\vec{PA} + 2\vec{PB} + 3\vec{PC} = k\vec{AB}$

始点をAに統一

$$-\vec{AP} + 2(\vec{AB} - \vec{AP}) + 3(\vec{AC} - \vec{AP}) = k\vec{AB}$$

$$6\vec{AP} = (2-k)\vec{AB} + 3\vec{AC}$$

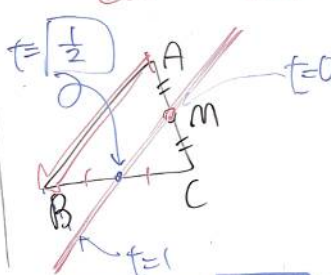
$$\vec{AP} = \frac{(2-k)\vec{AB} + 3\vec{AC}}{6}$$

$$\left[\vec{AP} = \underbrace{\frac{2\vec{AB} + 3\vec{AC}}{6}}_{\text{重心}} + k \underbrace{\left(\frac{-\vec{AB}}{6} \right)}_{\text{方向}} \right]$$

↑ parameter → 線

$$t = \frac{2-k}{6} \text{ とおく } t \text{ も線形}$$

$$\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AC} + t\vec{AB}$$



点Pが $\triangle ABC$ の内部 (周は含まない)

$$0 < t < 1$$

$$0 < \frac{2-k}{6} < \frac{1}{2}$$

$$-1 < k < 2$$

[4] 2 para $\Rightarrow$ 2次元