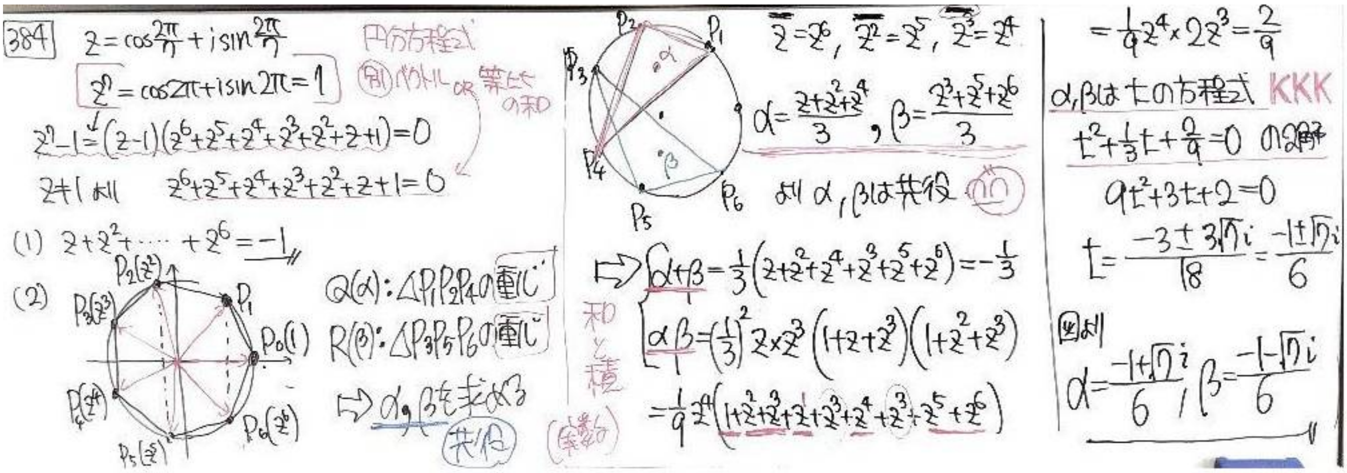
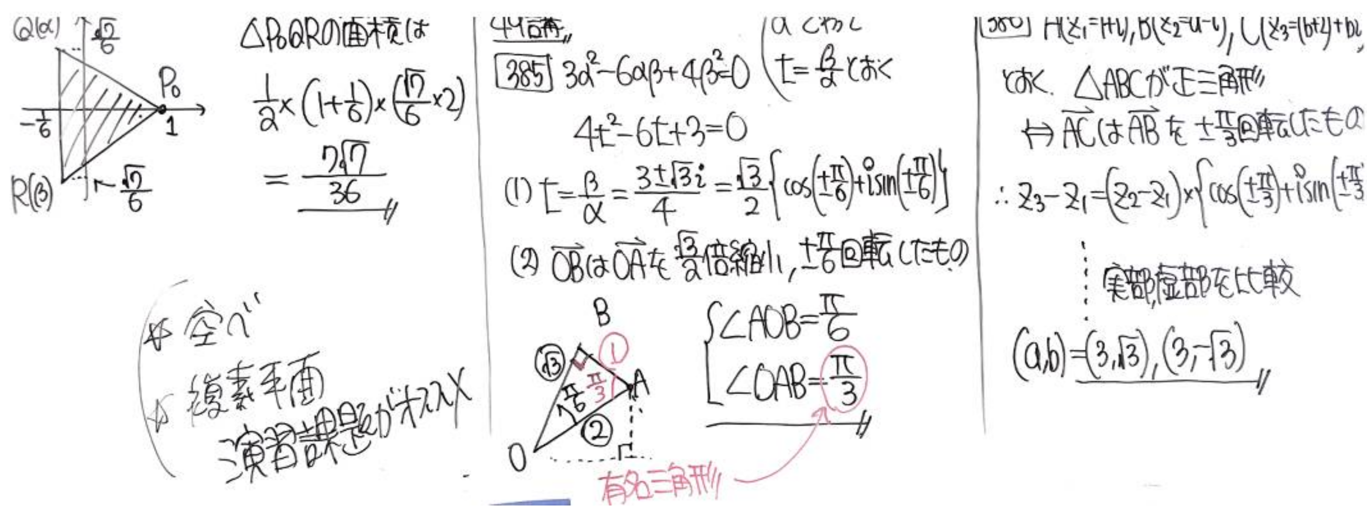
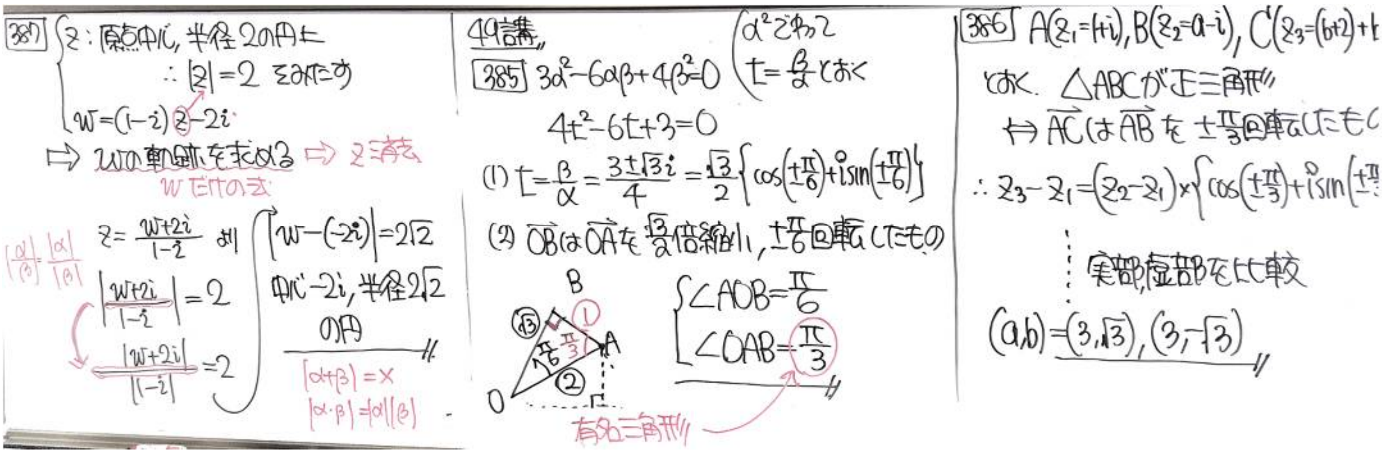
zemik2020-08-12（board）

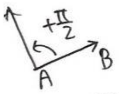






$\gamma-\alpha=(\beta-\alpha)\times\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right\}$

$\overrightarrow{AC}$ は $\overrightarrow{AB}$ を $\pm\frac{\pi}{2}$ 回転したもの



∠Aが直角の直角二等辺三角形

複素平面

計算：z → $x+yi$ … r,θ

図形：図, 方程式

三角形の形状

△OAB ⇒ $\frac{\beta-0}{\alpha-0}$ など　O

△ABC ⇒ $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ など　A

回転中心

388 α,β,γ：異なる複素数

$2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma=0$

(1) $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=$ [?] ⇒ (2) △ABCの形状

（β, γを1か所にまとめよ、という誘導）

γで整理. $\gamma^2-2\alpha\gamma+(2\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)=0$

$(\gamma-\alpha)^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=0$

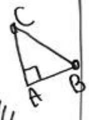
$(\gamma-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2=0$

$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2+1=0$

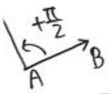
$\therefore \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm i$ (1)

$\frac{\pi}{2})\}$

は $\overrightarrow{AB}$ を $\pm\frac{\pi}{2}$ 回転したもの



∠Aが直角の直角二等辺三角形



複素平面

計算：z → $x+yi$ … r,θ

図形：図, 方程式

$x^2+3=0$

(3) k：実数の定数　$f(x)$とおく

α,β,γ は $x^3+kx+20=0$ の3解

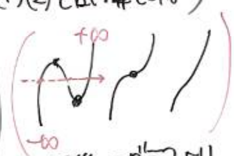
⇒ α,β,γ および k を求める。

KKK

$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-k\\ \alpha\beta\gamma=-20\end{cases}$

4文字3式

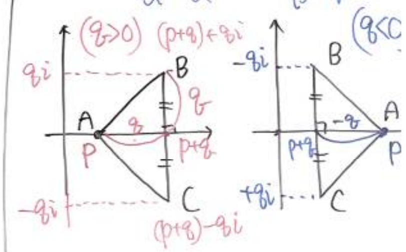
(1)(2)を誘導とみなす

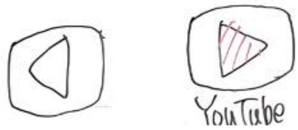


3次関数のグラフより、少なくとも1つ実数解をもつ

(2)より 1つは実数解、残りは共役

$\overline{\alpha}=\alpha$　$\overline{\beta}=\gamma$





$\alpha=p$，$\beta=(p+q)\pm qi$，$\gamma=(p+q)\mp qi$ とおく

KKKより

$\alpha+\beta+\gamma=3p+2q=0$ ①

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma$ ②

$=p\times2(p+q)+(p+q)^2+q^2=+k$

$\alpha\beta\gamma=p\times\{(p+q)^2+q^2\}=-20$ ③

$q=-\frac{3}{2}p$

$q^2=\frac{9}{4}p^2$

$\frac{5}{2}p^3=-20$，$p^3=-8$

$p=-2$，$q=3$

$(\gamma-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2=0$

以上より

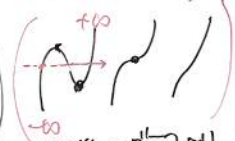
$k=6$，$\alpha=-2$，$\beta=1\pm3i$，$\gamma=1\mp3i$

… および k を求める。

(1)(2)を誘導とみなす

$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-k\\ \alpha\beta\gamma=-20\end{cases}$

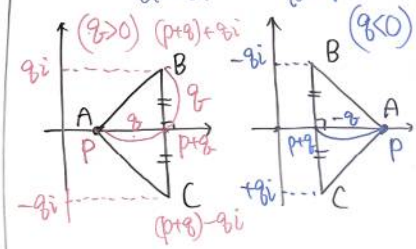
4文字3式

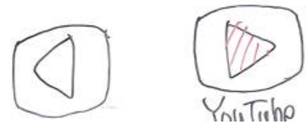


3次関数のグラフより、少なくとも1つ実数解をもつ

(2)より 1つは実数解、残りは共役

$\overline{\alpha}=\alpha$　$\overline{\beta}=\gamma$





$\left\{\cos\frac{(n-1)\pi}{3}\right\}$：$1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$

周期6

2^{n-1} に着目 $(2^{10}=1024)$ $n\geq11$が必要

$\begin{cases}z_{11}=2^{10}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-512 & \times\\ z_{12}=2^{11}\times\frac{1}{2}=1024 & ○\end{cases}$

求める最小のnは $n=12$

389 $\begin{cases}z_1=1+\frac{\sqrt{3}}{3}i\\ z_{n+1}=(1+\sqrt{3}i)z_n+1\end{cases}$　等比から ズレ

(1)

$-)\ \alpha=(1+\sqrt{3}i)\alpha+1$　　$\alpha=\frac{-1}{\sqrt{3}i}=\frac{i}{\sqrt{3}}$

$z_{n+1}-\alpha=(1+\sqrt{3}i)(z_n-\alpha)$

$z_{n+1}-\frac{i}{\sqrt{3}}=(1+\sqrt{3}i)\left(z_n-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)$ ←等比

(n+1)　(n)

[illegible]

$z_n-\frac{i}{\sqrt{3}}=\left(z_1-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)\times(1+\sqrt{3}i)^{n-1}$

(n)　(1)

$\therefore z_n=(1+\sqrt{3}i)^{n-1}+\frac{\sqrt{3}}{3}i$

(2) $z_n=\left\{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n-1}+\frac{\sqrt{3}}{3}i$

$=2^{n-1}\times\left\{\cos\frac{(n-1)\pi}{3}+i\sin\frac{(n-1)\pi}{3}\right\}+\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\mathrm{Re}(z_n)=2^{n-1}\times\cos\frac{(n-1)\pi}{3}$　周期

$\left\{\cos\frac{(n-1)\pi}{3}\right\}$: $1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \dots$

周期6

2^{n-1} に着目 ($2^{10}=1024$)　$n \geq 11$ が必要

$$\begin{cases} z_{11} = 2^{10} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -512 & \times \\ z_{12} = 2^{11} \times \frac{1}{2} = 1024 & \bigcirc \end{cases}$$

求める最小の n は $n=12$

389 $\begin{cases} z_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} i \\ z_{n+1} = (1+\sqrt{3}i) z_n + 1 \end{cases}$　等比からズレ

(1)

$-)\ \alpha = (1+\sqrt{3}i)\alpha + 1$　　$\alpha = \frac{-1}{\sqrt{3}i} = \frac{i}{\sqrt{3}}$

$z_{n+1} - \alpha = (1+\sqrt{3}i)(z_n - \alpha)$

$z_{n+1} - \frac{i}{\sqrt{3}} = (1+\sqrt{3}i)\left(z_n - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)$ ← 等比

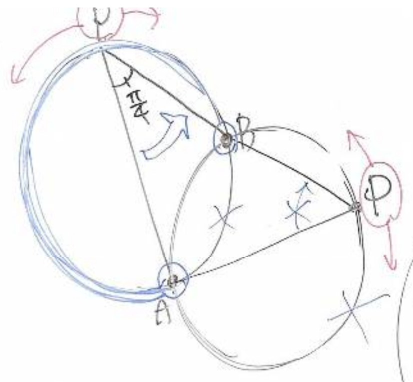
$z_n - \frac{i}{\sqrt{3}} = \left(z_1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right) \times (1+\sqrt{3}i)^{n-1}$

$\therefore z_n = (1+\sqrt{3}i)^{n-1} + \frac{\sqrt{3}}{3} i$

(2) $z_n = \left\{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n-1} + \frac{\sqrt{3}}{3} i$

$= 2^{n-1} \times \left\{\cos\frac{(n-1)\pi}{3} + i\sin\frac{(n-1)\pi}{3}\right\} + \frac{\sqrt{3}}{3} i$

$\mathrm{Re}(z_n) = 2^{n-1} \times \cos\frac{(n-1)\pi}{3}$　周期



$\overrightarrow{PB}$ は $\overrightarrow{PA}$ を $\frac{\pi}{4}$ 回転し拡大・縮小したもの

中心 $\gamma = 3+4i$

$t=28$

391 $A(\alpha=6)$, $B(\beta=7+7i)$, $P\left(z=\frac{\dots}{(1-i)t-7}\right)$ における

(1) ∠APBの大きさ

$\frac{\overrightarrow{PB} \to \beta - z}{\overrightarrow{PA} \to \alpha - z} = \frac{7+7i - \frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}}{6 - \frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}} = \cdots$　分母は有理化

$= \frac{7\sqrt{2}}{2t}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\angle APB = \frac{\pi}{4}$ (一定)