$\boxed{1}$ $2x^2+5xy-3y^2+x+17y-10$ を因数分解せよ。

$\boxed{2}$ $(x+1)(y+1)(xy+1)+xy$ を因数分解せよ。

$\boxed{3}$ $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ を簡単にせよ。

$\boxed{4}$ 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+4a=0$ (定数 a, b は実数) が虚数解 $\dfrac{-5+\sqrt{7}\,i}{2}$ をもつとき，

a, b の値と実数解を求めよ.

$\boxed{5}$ 等式 $x^3-1=(x-2)^3+a(x-2)^2+b(x-2)+c$ が x についての恒等式となるとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

$\boxed{6}$ 3 次方程式 $x^3+(2a-1)x^2-3(a-2)x+a-6=0$ の 3 つの解のうち，ちょうど 2 つが等しいとき，定数 a の値を定めよ。

$\boxed{7}$ 多項式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると 8 余り，x^2-4 で割ると $-2x+1$ 余るとき，$P(x)$ を $(x-1)(x^2-4)$ で割ったときの余りを求めよ。

$\boxed{8}$ (1) $x^4-4x^3-8x^2+24x-45=0$ は，$x=1+\sqrt{2}\,i$ を解にもつ。その他の解をすべて求めよ。

(2) (1)の結果を用いて，$x^4-4ix^3+8x^2-24ix-45=0$ の解をすべて求めよ.

$\boxed{9}$ $\{(9+4\sqrt{5})^n+(9-4\sqrt{5})^n\}^2-\{(9+4\sqrt{5})^n-(9-4\sqrt{5})^n\}^2$ を簡単にせよ。ただし，n は整数とする。

$\boxed{10}$ 連立方程式 $\begin{cases} x+(a-1)y=-1 \\ ax+(a+3)y=1 \end{cases}$ は $a=$ ア$\boxed{}$ のとき解が存在せず，$a=$ イ$\boxed{}$ のとき解が無数に存在する。

$\boxed{11}$ a は定数とする。3 つの数 x，y，z は関係式

$$xyz=2(xy+yz+zx),\quad x+y+z=a$$

を満たす。

(1)　x，y，z のうち少なくとも 1 つが 2 であるとする。このとき，a の値を求めよ。

(2)　(1)のもとで，$x^3+y^3+z^3$ の値を求めよ。

$\boxed{12}$ $f(x)=x^2+2x+c$ について，x の方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもち，$f(f(x))=0$ が重解 α をもつとき，α，c の値を求めよ。

$\boxed{13}$ $\alpha=1+\sqrt{3}\,i$，$\beta=1-\sqrt{3}\,i$ のとき

$$\left(\frac{\beta^2-4\beta+8}{\alpha^{n+2}-\alpha^{n+1}+2\alpha^n+4\alpha^{n-1}+\alpha^3-2\alpha^2+5\alpha-2}\right)^3$$ の値を求めよ。

ただし，n は 2 以上の自然数，i は虚数単位とする。

【配点】８、１０、１１は２問扱いで、原則各６点、例外は９，１３は８点

$\boxed{1}$ 解答　$(2x-y+5)(x+3y-2)$

$\boxed{2}$ 解答　$(xy+x+1)(xy+y+1)$

$\boxed{3}$ 解答　$\sqrt{6}$

$\boxed{4}$ 解答　$a=10, b=33, x=-5$

$\boxed{5}$ 解答　$a=6$，$b=12$，$c=7$

$\boxed{6}$ 解答　$a=-7$，-3，2

$\boxed{7}$ 解答　$-3x^2-2x+13$

$\boxed{8}$ 解答　順に　$x=1-\sqrt{2}i$，5，-3；$x=\pm\sqrt{2}+i$，$5i$，$-3i$

$\boxed{9}$ 解答　4

$\boxed{10}$ 解答　（ア）　3　　（イ）　-1

$\boxed{11}$ 解答　$a=2$，$x^3+y^3+z^3=8$

$\boxed{12}$ 解答　$\alpha=-1$，$c=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{13}$ 解答　-8

$\boxed{1}$ $2x^2+5xy-3y^2+x+17y-10=2x^2+(5y+1)x-(3y^2-17y+10)$

$$=2x^2+(5y+1)x-(3y-2)(y-5)$$
$$=\{2x-(y-5)\}\{x+(3y-2)\}$$
$$=(2x-y+5)(x+3y-2)$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & \diagup\!\!\!\!\diagdown & -(y-5) \longrightarrow & -y+5 \\ 1 & & 3y-2 \longrightarrow & 6y-4 \\ \hline 2 & & & 5y+1 \end{array}$$

$\boxed{2}$ $(x+1)(y+1)(xy+1)+xy$

$=(x+1)\{xy^2+(x+1)y+1\}+xy$

$=x(x+1)y^2+\{(x+1)^2+x\}y+x+1$

$=\{x\cdot y+(x+1)\}\{(x+1)\cdot y+1\}$

$=(xy+x+1)(xy+y+1)$

$$\begin{array}{cccc} x & \diagup\!\!\!\!\diagdown & x+1 \longrightarrow & (x+1)^2 \\ x+1 & & 1 \longrightarrow & x \\ \hline & & & (x+1)^2+x \end{array}$$

別解　$(x+1)(y+1)(xy+1)+xy=(xy+x+y+1)(xy+1)+xy$

$$=\{(xy+1)+x+y\}(xy+1)+xy$$
$$=(xy+1)^2+(x+y)(xy+1)+xy$$
$$=\{(xy+1)+x\}\{(xy+1)+y\}$$
$$=(xy+x+1)(xy+y+1)$$

$\boxed{3}$ $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}+\sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}}$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$$

4 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4a$ とおく．

$x=\dfrac{-5+\sqrt{7}i}{2}$ のとき　$2x+5=\sqrt{7}i$

両辺を平方して　$4x^2+20x+25=-7$ から　$x^2+5x+8=0$

$f(x)$ は x^2+5x+8 で割り切れるから，次の恒等式が成り立つ．

$$x^3+ax^2+bx+4a=(x^2+5x+8)(x+c)$$

よって　$x^3+ax^2+bx+4a=x^3+(c+5)x^2+(5c+8)x+8c$

ゆえに，両辺の係数を比べて

$$a=c+5 \cdots\cdots ①,\ b=5c+8 \cdots\cdots ②,\ 4a=8c \cdots\cdots ③$$

① を ③ に代入すると，$4(c+5)=8c$ から　$c=5$

これを ①，② に代入して　$a=10, b=33$

また，実数解は　$x=-c=-5$

5 $x^3-1=(x-2)^3+a(x-2)^2+b(x-2)+c$ …… ① が x についての恒等式であるから，どのような x についても成り立つ。

① に $x=2$ を代入すると　$7=c$

① に $x=3$ を代入すると　$26=1+a+b+c$

① に $x=1$ を代入すると　$0=-1+a-b+c$

これを解いて　$a=6$，$b=12$，$c=7$

このとき，① の右辺は $(x-2)^3+6(x-2)^2+12(x-2)+7=x^3-1$ となり，左辺に一致し，恒等式となる。

したがって　$a=6$，$b=12$，$c=7$

別解 1　右辺を展開して整理すると

$$x^3-1=x^3+(a-6)x^2+(-4a+b+12)x+4a-2b+c-8$$

よって　$a-6=0$，$-4a+b+12=0$，$4a-2b+c-8=-1$

これを解くと　$a=6$，$b=12$，$c=7$

別解 2　$x-2=t$ とおくと　$x=t+2$

等式に代入すると　$(t+2)^3-1=t^3+at^2+bt+c$

すなわち　$t^3+6t^2+12t+7=t^3+at^2+bt+c$

これは t の恒等式となる。

両辺の係数を比較して　$a=6$，$b=12$，$c=7$

6 $f(x)=x^3+(2a-1)x^2-3(a-2)x+a-6$ とすると

$$f(1)=1^3+(2a-1)\cdot 1^2-3(a-2)\cdot 1+a-6$$
$$=1+2a-1-3a+6+a-6=0$$

1	$2a-1$	$-3(a-2)$	$a-6$	1
	1	$2a$	$-a+6$	
1	$2a$	$-a+6$	0	

よって，$f(x)$ は $x-1$ を因数にもつから

$$f(x)=(x-1)(x^2+2ax-a+6)$$

ゆえに，方程式は　$(x-1)(x^2+2ax-a+6)=0$

したがって　$x-1=0$　または　$x^2+2ax-a+6=0$

この3次方程式の3つの解のうち，ちょうど2つが等しい条件は，次の[1]または[2]が成り立つことである。

[1]　$x^2+2ax-a+6=0$ が1でない重解をもつ。

判別式を D とすると

$$D=0 \quad \text{かつ} \quad 1^2+2a\cdot1-a+6=a+7\fallingdotseq 0$$

$$\frac{D}{4}=a^2-(-a+6)=a^2+a-6=(a+3)(a-2)$$

$D=0$ とすると　$a=-3,\ 2$

これは $a+7\fallingdotseq 0$ を満たす。

[2]　$x^2+2ax-a+6=0$ の1つの解が1，他の解が1でない。

$x=1$ が解であるから　$1^2+2a\cdot1-a+6=0$

よって　$a+7=0$　ゆえに　$a=-7$

このとき　$x^2-14x+13=0$　よって　$(x-1)(x-13)=0$

これを解いて　$x=1,\ 13$

したがって，他の解が1でないから適する。

[1]，[2]から，求める定数 a の値は　$a=-7,\ -3,\ 2$

$\boxed{7}$ $(x-1)(x^2-4)$ は3次式であるから，$P(x)$ を $(x-1)(x^2-4)$ で割ったときの余りは，2次以下の多項式になる。

よって，求める余りを ax^2+bx+c として

$$P(x)=(x-1)(x^2-4)\,Q(x)+ax^2+bx+c$$

とおける。

条件から　$P(1)=8$

また，$P(x)$ を x^2-4 で割った商を $A(x)$ とする。余りが $-2x+1$ であるから

$$P(x)=(x^2-4)\,A(x)-2x+1$$

よって　$P(2)=-2\cdot2+1=-3$，

$P(-2)=-2\cdot(-2)+1=5$

したがって　$P(1)=a+b+c=8$

$P(2)=4a+2b+c=-3$

$P(-2)=4a-2b+c=5$

これを解いて

$$a=-3,\ b=-2,\ c=13$$

よって，求める余りは

$$-3x^2-2x+13$$

$\boxed{8}$ 係数が実数であるから，$x=1-\sqrt{2}\,i$ も解である.

したがって，与式の左辺は $\{x-(1+\sqrt{2}\,i)\}\{x-(1-\sqrt{2}\,i)\}=x^2-2x+3$ で割り切れる.

ゆえに　$x^4-4x^3-8x^2+24x-45=(x^2-2x+3)(x^2-2x-15)$

よって　$(x^2-2x+3)(x-5)(x+3)=0$　ゆえに，他の解は　$x=1-\sqrt{2}\,i,\ 5,\ -3$

また，

$x^4-4ix^3+8x^2-24ix-45=0$ は $(-ix)^4-4(-ix)^3-8(-ix)^2+24(-ix)-45=0$

と変形できるから　$-ix=1\pm\sqrt{2}i$，5，-3　　ゆえに　$x=\pm\sqrt{2}+i$，$5i$，$-3i$

$\boxed{9}$ $a=(9+4\sqrt{5})^n$，$b=(9-4\sqrt{5})^n$ とすると

(与式)$=(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

$=4(9+4\sqrt{5})^n(9-4\sqrt{5})^n=4\{(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})\}^n=4(81-80)^n=4\cdot 1^n=4$

$\boxed{10}$ $\begin{cases} x+(a-1)y=-1 \cdots\cdots ① \\ ax+(a+3)y=1 \cdots\cdots ② \end{cases}$ とおく。

①$\times a-$② から　$(a^2-2a-3)y=-a-1$

すなわち　$(a+1)(a-3)y=-(a+1)$ ……③

[1]　$a\fallingdotseq 3$　かつ　$a\fallingdotseq -1$ のとき

③から　$y=-\dfrac{1}{a-3}$

このとき，①から　$x=\dfrac{2}{a-3}$

ゆえに，解 $(x,\ y)$ が 1 つに定まる。

[2]　$a=3$ のとき　③を満たす y は存在しない。

ゆえに，解は存在しない。

[3]　$a=-1$ のとき　③を満たす y は無数に存在する。

このとき，①，②はともに $x-2y=-1$ となる。

ゆえに，連立方程式の解は $x-2y=-1$ を満たす $(x,\ y)$ となり，無数に存在する。

[1]～[3]から，$a=$ア3 のとき解が存在せず，$a=$イ-1 のとき解が無数に存在する。

$\boxed{11}$ (1)　$(x-2)(y-2)(z-2)=xyz-2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)-8$

$xyz=2(xy+yz+zx)$，$x+y+z=a$ であるから　$(x-2)(y-2)(z-2)=4a-8$

x，y，z のうち少なくとも 1 つが 2 であるとき　$(x-2)(y-2)(z-2)=0$

よって，　$4a-8=0$　　これを解くと　$a=2$

(2)　また，$x+y+z=a=2$ であるから

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz \\ &= 2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3\cdot 2(xy+yz+zx) \\ &= 2(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx) \\ &= 2(x+y+z)^2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$\boxed{12}$ $f(x)=0$ すなわち $x^2+2x+c=0$ の異なる 2 つの実数解を β，γ とすると，解と係数の関係により　$\beta+\gamma=-2$，　$\beta\gamma=c$

よって，$f(f(x))=0$ から

$\{f(x)\}^2+2f(x)+c=0$

$\{f(x)\}^2-(\beta+\gamma)f(x)+\beta\gamma=0$

$\{f(x)-\beta\}\{f(x)-\gamma\}=0$

$(x^2+2x+c-\beta)(x^2+2x+c-\gamma)=0$

$f(f(x))=0$ が重解 α をもつから，

$x^2+2x+c-\beta=0$ ……①，　$x^2+2x+c-\gamma=0$ ……②

とすると，次のいずれかが成り立つ。

[1]　①，② がともに解 α をもつ

[2]　① が重解 α をもつ

[3]　② が重解 α をもつ

[1] のとき，$\beta=\gamma=\alpha^2+2\alpha+c$ となり，$\beta\neq\gamma$ を満たさないから不適。

[2] のとき，① は　$(x+1)^2=0$

よって　$\alpha=-1$，$c-\beta=1$

$\beta=c-1$ を $x^2+2x+c=0$ に代入すると　$(c-1)^2+2(c-1)+c=0$

よって　$c^2+c-1=0$　　したがって　$c=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

[3] のとき，[2] のときと同様にして　$\alpha=-1$，$c=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

以上から　$\alpha=-1$，$c=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{13}$ $\alpha=1+\sqrt{3}i$，$\beta=1-\sqrt{3}i$ のとき　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=4$

よって，α，β は t についての 2 次方程式 $t^2-2t+4=0$ の 2 つの解である。

$f(t)=t^2-2t+4$ とすると

$f(\alpha)=\alpha^2-2\alpha+4=0$，　$f(\beta)=\beta^2-2\beta+4=0$　……①

ゆえに，① より

$$\alpha^{n+2}-\alpha^{n+1}+2\alpha^n+4\alpha^{n-1}=\alpha^{n-1}(\alpha^3-\alpha^2+2\alpha+4)=\alpha^{n-1}(\alpha+1)(\alpha^2-2\alpha+4)$$
$$=\alpha^{n-1}(\alpha+1)f(\alpha)=0,$$

$$\alpha^3-2\alpha^2+5\alpha-2=\alpha(\alpha^2-2\alpha+4)+\alpha-2=\alpha f(\alpha)+\alpha-2=\alpha-2=-\beta,$$

$$\beta^2-4\beta+8=(\beta^2-2\beta+4)-2\beta+4=f(\beta)-2(\beta-2)=-2(\beta-2)=2\alpha$$

したがって　$\left(\dfrac{\beta^2-4\beta+8}{\alpha^{n+2}-\alpha^{n+1}+2\alpha^n+4\alpha^{n-1}+\alpha^3-2\alpha^2+5\alpha-2}\right)^3=\left(\dfrac{2\alpha}{-\beta}\right)^3=-\dfrac{8\alpha^3}{\beta^3}$

ここで，$(t+2)f(t)=(t+2)(t^2-2t+4)=t^3+8$，$f(\alpha)=0$，$f(\beta)=0$ より

$\alpha^3+8=(\alpha+2)f(\alpha)=0$，　$\beta^3+8=(\beta+2)f(\beta)=0$

ゆえに　$\alpha^3=-8$，　$\beta^3=-8$

したがって　$\left(\dfrac{\beta^2-4\beta+8}{\alpha^{n+2}-\alpha^{n+1}+2\alpha^n+4\alpha^{n-1}+\alpha^3-2\alpha^2+5\alpha-2}\right)^3=-\dfrac{8\cdot(-8)}{-8}=-8$