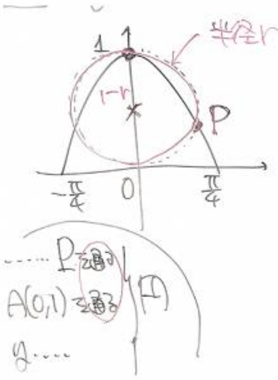
zemik2020-09-11（board）



P(p, cos2p) とおく

$(-\frac{\pi}{4}\leq p\leq\frac{\pi}{4},\ p\neq0)$

円: $x^2+(y-(1-r))^2=r^2$

$\Leftrightarrow x^2+((y-1)+r)^2=r^2$

ここに点Pを代入

$p^2+((\cos2p-1)+r)^2=r^2$

$r=-\frac{p^2}{2(\cos2p-1)}-\frac{\cos2p-1}{2}$

$=+\frac{1}{2}\times\boxed{\frac{p^2}{1-\cos2p}}-\frac{\cos2p-1}{2}$

p→Aのとき p→0

$\lim_{p\to0}r=\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{4}-\frac{1-1}{2}$

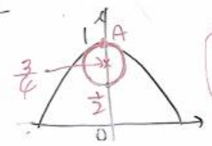
$=\frac{1}{4}$

$\frac{(2p)^2}{1-\cos2p}\times\frac{1}{4}\to$

OR

$\frac{p^2}{\sin^2 2p}\times(1+\cos$

$\to\frac{1}{2}$



$\boxed{\frac{1}{4}R}$

チャレ(61) $a_n=\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ =2θ

(1) $a_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{2}{a_n}$ を証明

一般項から漸化式を作る

$a_{n+1}=\tan\boxed{\frac{\pi}{2^{n+2}}}$ =θ とおく

$\theta=\frac{\pi}{2^{n+2}}$ とおくと

$a_{n+1}=\tan\theta,\ a_n=\tan2\theta$

$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$a_n=\frac{2a_{n+1}}{1-a_{n+1}^2}$

$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{a_{n+1}}-a_{n+1}\right)$

$\frac{2}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}}-a_{n+1}$ —①

∴ $a_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{2}{a_n}$ —② ■

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{1}{2^{k+1}}$ 5パターン

第n部分和

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{1}{2^{k+1}}$ とおく

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k}$ ← (① $\frac{2}{a_k}=\cancel{\frac{1}{a_{k+1}}-a_{k+1}}$ 代入)

ここで ②で n=k−1 を代入 　k=1代入

$a_k=\frac{1}{a_k}-\frac{2}{a_{k-1}}$ より 　階差

$\frac{a_k}{2^k}=\frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{2}{a_{k-1}}\right)=\frac{1}{2^k a_k}-\frac{1}{2^{k-1}a_{k-1}}$

より $S_n=\frac{a_1}{2^1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{2^k}$

$=\frac{a_1}{2^1}+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2^k a_k}-\frac{1}{2^{k-1}a_{k-1}}\right)$

$=\frac{a_1}{2^1}+\left(\frac{1}{2^n a_n}-\frac{1}{2^1 a_1}\right)$ ← $a_1=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$=\frac{1}{2^n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}$ ← ($\theta=\frac{\pi}{2^{n+1}}$ より $2^n=\frac{\pi}{2\theta}$, n→∞のとき θ→0)

$=\frac{1}{\frac{\pi}{2\theta}\cdot\tan\theta}$

$=\frac{2}{\pi}\times\frac{\theta}{\tan\theta}$

以上より

(与式)$=\lim_{n\to\infty}S_n$

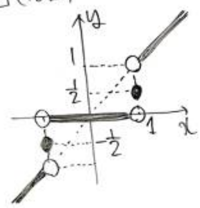
$=\frac{2}{\pi}$

62講

$\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e\Leftrightarrow\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

489 (1) $\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$ 　(2) e^3 　(3) e^{-4}

490 (答略)



491 $f(x)=\begin{cases}x+1 & (x\neq1)\\ a & (x=1)\end{cases}$

連続性より

a=2

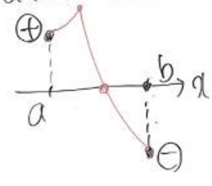
492 中間値の定理 p.290

f(x): 連続関数 ← 前提

f(a)とf(b)が異符号 (a<b)

⇨ 方程式 f(x)=0は

a<x<bで少なくとも1つ解をもつ



f(x)=sin x − x·cos x とおく

$f(\pi)=\pi>0$ ⊕

$f(\frac{3\pi}{2})=-1<0$ ⊖

より

f(x)は連続だから 中間値の定理

$\pi<x<\frac{3\pi}{2}$に少なくとも1つ

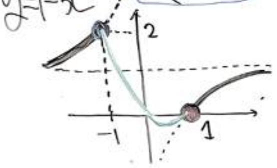
実数解をもつ ■

493 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ $\frac{\infty}{\infty}$とは限らない

$$=\begin{cases} ax^2+bx & (|x|<1)\\ \boxed{\frac{1}{2}(a+b)}=0 & (x=1)\\ 1-\frac{1}{x} & (|x|>1)\ \frac{\infty}{\infty}(\text{循環}) \\ \boxed{\frac{1}{2}(2+a-b)}=2 & (x=-1)\end{cases}$$

$\frac{x-1}{x}$

$y=1-\frac{1}{x}$



連続性より

$a=1,\ b=-1$ //

494 $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$ $\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\right)$

(1) -5 (2) 2 (3) 2

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim\dfrac{(e^x-1)-(e^{-x}-1)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\dfrac{e^x-1}{x}-\dfrac{e^{-x}-1}{(-x)}\times(-1)\right\}=2$

(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\times\dfrac{x^2}{1-\cos x}=2$

496 n：2以上の自然数

$x^{2n}=\underbrace{P_n(x)}_{\text{商}}\cdot\left(x^2-x+\frac{n-1}{n^2}\right)+\underbrace{a_nx+b_n}_{\text{あまり}}$

0

解の公式

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4\times\frac{n-1}{n^2}}}{2}$ $\quad\dfrac{n^2-4n+4}{n^2}$

$x^{2n}=P_n(x)\cdot\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{n-1}{n}\right)+a_nx+b_n$

$1^\infty=$ $\quad(1+0)^\infty\Rightarrow e$の定義

$x=\frac{1}{n}$代入 $\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}=\frac{1}{n}a_n+b_n$ ——①

$x=\frac{n-1}{n}$代入 $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}=\frac{n-1}{n}a_n+b_n$ ——②

②−①より b_n消去

$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}-\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}=\frac{n-2}{n}a_n$

$a_n=\dfrac{n}{n-2}\left\{\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{2n}-\left(\dfrac{1}{n}\right)^{2n}\right\}$

1 $\quad(1+0)^\infty$ $\quad\to 0$

$\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-2}\to e^{-2}$

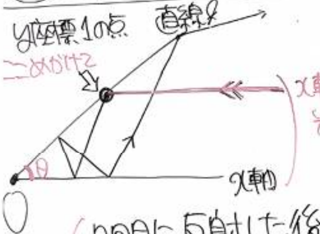
よって $\lim_{n\to\infty}a_n=e^{-2}$

また①より $b_n=\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}-\underset{n\to\infty}{a_n}$ $\ e^{-2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=0$ //

(注) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2n}}=0$

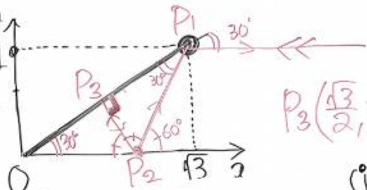
過去問めぐり 久留米



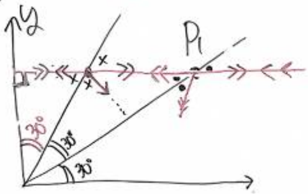
n回目に反射した後
入射した経路を逆に進む!?
(上図は題意に反する図)

特別なこと

(i) $\theta=30°$で実験せよ という誘導



$P_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$



光の反射

(ii) θが題意となるのは
θが90°の約数のとき $30°, 45°, 90°$

$\theta=1°, 2°, 3°, 5°, 6°, 9°, 10°, 15°, 18°$

11個 //

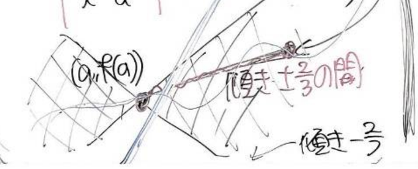
495 テーマ 抽象的な関数の取り扱い.

$f(x)$：連続，$|f(x)-f(a)| \leqq \frac{2}{3}|x-a|$ for all x

$\Rightarrow$ $y=f(x)$ と $y=x$ は交点をもつ

これを $\boxed{\text{証明}}$

条件 $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leqq \frac{2}{3}$



[グラフから成立しそうだが….]

交点 ↔ 解 に着目

$g(x)=f(x)-x$ とおく.

条件より

$$|(g(x)+x)-(g(a)+a)| \leqq \frac{2}{3}|x-a|$$

$$|g(x)-g(a)+x-a| \leqq \frac{2}{3}|x-a|$$

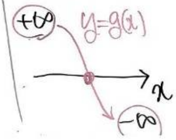
$$-\frac{2}{3}|x-a| \leqq g(x)-g(a)+x-a \leqq \frac{2}{3}|x-a|$$

$$\underbrace{-\frac{2}{3}|x-a|-x+a+g(a)}_{h_1(x)}$$

$$\leqq \boxed{g(x)} \leqq \underbrace{\frac{2}{3}|x-a|-x+a+g(a)}_{h_2(x)}$$

$$h_1(x) \leqq \boxed{g(x)} \leqq h_2(x)$$

$x \to -\infty$ のとき $h_1(x) \to +\infty$ ／ $x \to \infty$ のとき $h_2(x) \to -\infty$



$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

中間値の定理