YAWARAKA 先生のテキスト 解答 ⑫数と式

標準問題

【1】 x^2+2x-4

【2】 $nx+(1-n)$

【3】 $n=4k$ のとき 1 ， $n=4k+1$ のとき x，
$n=4k+2$ のとき -1，$n=4k+3$ のとき，$-x$

【4】 $n=3k$ のとき 1，　$n=3k+1$ のとき x，　$n=3k+2$ のとき $-x-1$

【5】 $a=5$ のとき，$\dfrac{x^2-4x+8}{x^2-5x+11}$，$a=6$ のとき，$\dfrac{x^2-3x+3}{x^2-4x+4}$

【6】 $x^2-2x-4=0$

【7】 $p=-1, q=1$

【8】 (1) $x^3-x^2+x-2=0$　　(2) 1

【9】 $x+\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，$t^2-2t-3=0$ より $t=3,-1$

よって，$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

発展問題

1　2005 群馬大学

2

解答　（1）　$P(x)=ax+b$，
$Q(x)=cx+d$
とおき，これらを①に代入すると，
$(x^2+2x-3)(ax+b)-(x^2-x-2)(cx+d)=1$
∴　$(a-c)x^3+(2a+b+c-d)x^2$
$+(-3a+2b+2c+d)x+(-3b+2d)=1$
となる。
これが x について恒等的に成立すべきであることより，条件

$$\begin{cases} a \quad\quad -c \quad\quad =0 \\ 2a+b+c-d=0 \\ -3a+2b+2c+d=0 \\ -3b \quad\quad +2d=1 \end{cases}$$

を得る。
この連立方程式を解くと

$$\begin{cases} a=\dfrac{3}{20},\ b=-\dfrac{1}{10} \\ c=\dfrac{3}{20},\ d=\dfrac{7}{20} \end{cases}$$

となる。
したがって，

$P(x)=\dfrac{3}{20}x-\dfrac{1}{10}$，$Q(x)=\dfrac{3}{20}x+\dfrac{7}{20}$．

（2）(1)で求めた1次式 $P(x)$，$Q(x)$ をそれぞれ $p_0(x)$，$q_0(x)$ とすると，
$(x^2+2x-3)p_0(x)-(x^2-x-2)q_0(x)=1$　……②
が成立する。
ゆえに，①−②より，
$(x^2+2x-3)(P(x)-p_0(x))$
$-(x^2-x-2)(Q(x)-q_0(x))=0$
∴　$(x^2+2x-3)(P(x)-p_0(x))$
$=(x^2-x-2)(Q(x)-q_0(x))$　……①′
が得られる。
①′の両辺は，互いに素な x^2+2x-3 と x^2-x-2 の倍数であるから，$(x^2+2x-3)(x^2-x-2)$ の倍数である。
$P(x)$，$Q(x)$ の次数についての仮定より，①′の両辺は，
$k(x^2+2x-3)(x^2-x-2)$
（k は0でない実数）
とおくことができ，これより

$$\begin{cases} P(x)-p_0(x)=k(x^2-x-2) \\ Q(x)-q_0(x)=k(x^2+2x-3) \end{cases}$$

を得る。　　A00048
したがって

$$\begin{cases} P(x)=k(x^2-x-2)+\dfrac{3}{20}x-\dfrac{1}{10} \\ Q(x)=k(x^2+2x-3)+\dfrac{3}{20}x+\dfrac{7}{20} \end{cases}$$

（ただし，k は0でない任意の数である。）
が求める1次式 $P(x)$，$Q(x)$ の一般形である。

3 （1）

解答　$f(x)$ を $(x-2)^2(x+2)$ で割った余りは高々2次式であり，
また，$f(x)$ を $(x-2)^2$ で割った余りが3であることにより，
$(x-2)^2(x+2)$ で割ったときの余りを，$a(x-2)^2+3$ とおくことができる．このときの商を $Q(x)$ とおくと

$$f(x)=(x-2)^2(x+2)Q(x)+a(x-2)^2+3 \quad \cdots\cdots(\ast)$$

$f(x)$ を $x+2$ で割った余りが35であるから

$$f(-2)=35$$

$(\ast)$を用いて

$$f(-2)=16a+3=35 \qquad \therefore\ a=2$$

よって，求める余りは，　$2(x-2)^2+3=2x^2-8x+11$　……(答)

3（2）

解　題意の2つの条件をみたす整式 $f(x)$ は，第1の条件により，$Q(x)$ を整式として，

$$f(x)=(x^2+2x+3)(x^2+1)Q(x)$$
$$+(x^2+2x+3)(ax+b)+x+1$$

とおけ，すると，$f(x)$ を x^2+1 で割った余りは，

$$\{(x^2+1)+2x+2\}(ax+b)+x+1$$
$$=(x^2+1)(ax+b)+2a\{(x^2+1)-1\}$$
$$+2bx+2(ax+b)+x+1$$

を x^2+1 で割った余り

$$\{2(a+b)+1\}x-2a+2b+1$$

に等しいから，第2の条件は

$$2(a+b)+1=0,\ -2a+2b+1=1$$

よって，　$a=b=-1/4$　と同値である．

以上において，$Q(x)$ は任意で，$Q(x)=0$ のときに $f(x)$ の次数は最低になるから，求める整式は，

$$(x^2+2x+3)\left(-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\right)+x+1$$

$$=-\frac{1}{4}(x^3+3x^2+x-1)$$

4

$x^2+px+q=0$

の2解が α, β だから

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-p & \cdots ① \\ \alpha\beta=q & \cdots ② \end{cases}$$

また $\begin{cases} f(\alpha)=\beta \\ f(\beta)=\alpha \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} \alpha^2+2p\alpha+2q=\beta & \cdots ③ \\ \beta^2+2p\beta+2q=\alpha & \cdots ④ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ③+④ : (\alpha^2+\beta^2)+2p(\alpha+\beta)+4q=\alpha+\beta \\ ③-④ : (\alpha^2-\beta^2)+2p(\alpha-\beta)=-(\alpha-\beta) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha+\beta)^2+(2p-1)(\alpha+\beta)-2\alpha\beta+4q=0 \\ (\alpha-\beta)(\alpha+\beta+2p+1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)+2p-1\}-2\alpha\beta+4q=0 \\ \alpha+\beta+2p+1=0 & (\because \alpha\neq\beta) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=-2p-1 & \cdots ⑤ \\ \alpha\beta=2p+2q+1 & \cdots ⑥ \end{cases}$$

①, ②, ③, ④ より

$$\begin{cases} -p=-2p-1 \\ q=2p+2q+1 \end{cases}$$

$\therefore p=-1,\ q=1$

5

(1) 有理数解 r を

$r=\frac{q}{p}$ (p, q は互いに素，$p>0$)

とおくと，r が解だから

$$\left(\frac{q}{p}\right)^n+a_n\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\left(\frac{q}{p}\right)+a_0=0 \quad \cdots ①$$

$$q^n=-p\left(a_nq^{n-1}+a_{n-1}pq^{n-2}+\cdots+a_1p^{n-2}+a_0p^{n-1}\right)$$

よって p は q^n の約数となるが，

p と q は互いに素であることに注意すれば

$p=1$ となるしかなく

従って，r は整数である //

①において，$p=1$ であることから

$$q^n+a_nq^{n-1}+\cdots+a_1q+a_0=0$$

$$\therefore q\left(q^{n-1}+a_nq^{n-2}+\cdots+a_1\right)=-a_0$$

従って，q すなわち r は a_0 の約数．

(2) 3次方程式 $x^3-16x^2-20x+51=0$ …………②

の有理数解は，(1)により，

$51=3\cdot17$ の約数 ±1，±3，±17，$\pm3\cdot17$

のどれかである．

これらの約数を順に調べていくと，$x=17$ のとき，

②の左辺 $=17^3-16\cdot17^2-20\cdot17+3\cdot17$

$=17^2(17-16)-17(20-3)$

$=17^2-17^2=0$

となるので，17 は1つの解である．よって，②の左辺は $x-17$ を因数にもつ．実際，

②の左辺 $=(x-17)(x^2+x-3)$

よって，②の解は，17 と，

方程式 $x^2+x-3=0$ の2解 $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

注 (1)で

$$\frac{q^n}{p}=-\left(a_nq^{n-1}+a_{n-1}pq^{n-2}+\cdots+a_0p^{n-1}\right)$$

として，$p\geqq2$ とすると

$\begin{cases}\text{右辺}=\text{整数}\\ \text{左辺}=\text{整数でない}\end{cases}$

で矛盾

としてもよい．

6

【解答】

$$f(x^2)=x^3f(x+1)-2x^4+2x^2 \quad \cdots ①$$

とおく．

(1)　①で $x=0,\ -1,\ 1$ として，

$$\begin{cases} f(0)=0, \\ f(1)=-f(0), \\ f(1)=f(2). \end{cases}$$

$$\therefore\quad f(0)=f(1)=f(2)=0. \quad \cdots ②$$

(2)　$f(x)=c$（c は定数）とすると，①より，

$$c=cx^3-2x^4+2x^2.$$

これが恒等式となることはない．

よって，$f(x)$ の次数を n とおくと，$n \geqq 1$ で，

$$\begin{cases} f(x^2) \text{ の次数は，} 2n \text{ 次，} \\ f(x+1) \text{ の次数は，} n \text{ 次} \end{cases}$$

となる．したがって，

$$\begin{cases} (\text{①の左辺の次数})=2n, \\ (\text{①の右辺の次数})=(n+3 \text{ と } 4 \text{ のうち小さくない方}) \\ \qquad\qquad\qquad =n+3. \quad (\because\ n \geqq 1) \end{cases}$$

$$\therefore\quad 2n=n+3. \qquad \therefore\quad n=3.$$

(3)　(2)の結果と，②より，因数定理を用いて，

$$f(x)=ax(x-1)(x-2) \quad (a \neq 0)$$

とかける．これを①へ代入して，

$$ax^2(x^2-1)(x^2-2)=x^3\cdot a(x+1)x(x-1)-2x^4+2x^2.$$

$$\therefore\quad ax^6-3ax^4+2ax^2=ax^6-(a+2)x^4+2x^2.$$

これが恒等式だから，両辺の係数を比較して，

$$\begin{cases} -3a=-(a+2), \\ 2a=2. \end{cases} \qquad \therefore\quad a=1.$$

よって，求める $f(x)$ は，

$$\boldsymbol{f(x)=x(x-1)(x-2)}$$
$$\boldsymbol{=x^3-3x^2+2x.}$$

7

point

x^4 と x^3 を $p(x)$ で割った余りが等しい $\iff$ $x^4-x^3=x^3(x-1)$ が $p(x)$ の倍数
$\iff$ $p(x)=ax^2(x-1)$ または $p(x)=ax^3$.
（$\because$ $p(x)$ は3次式）

解答

x^4 と x^3 を $p(x)$ で割った余りが等しいので，$x^4-x^3=x^3(x-1)$ が $p(x)$ の倍数となる．$p(x)$ は3次式なので $x^2(x-1)$ または x^3 の定数倍であるが，$p(x)=ax^3$ のときは x^4，x^3 が $p(x)$ で割り切れるので不適である．（〔注〕参照）

$$\therefore\ p(x)=ax^2(x-1).\ (a\neq 0)$$

$f(x)$ を $p(x)$ で割った商を $q(x)$，余りを $r(x)\neq 0$ とすると

$$f(x)=p(x)q(x)+r(x).\ (r(x)\text{ は2次以下の式})$$

$$\therefore\ xf(x)=xp(x)q(x)+xr(x).$$

$xf(x)$ が $p(x)$ で割り切れるので，$xr(x)$ は $p(x)$ の倍数．

$$\therefore\ xr(x)=kp(x)=kax^2(x-1).$$

$$\therefore\ r(x)=kax(x-1).$$

$r(x)$ の最高次の係数が1なので $ka=1$．$\therefore$ $\underline{r(x)=x(x-1)}$.

〔注1〕 $x^3(x-1)$ が3次式 $p(x)$ の倍数なら $p(x)=ax^2(x-1)$ または $p(x)=ax^3$ であることについて．$x^3(x-1)=p(x)q(x)$（$q(x)$ は整式）より，$p(x)=0$ の根は必ず $x^3(x-1)=0$ の根となる．したがって，$p(x)=0$ の根は 0，0，0，1 のうちの3つである．$\therefore$ $p(x)=ax^2(x-1)$ または $p(x)=ax^3$.

〔注2〕 2式を割った余りが等しいという条件を，上の〔解答〕のように，差が割り切れる（つまり差が $p(x)$ の倍数）ととらえる見方はあたりまえかもしれないが大切なことである．整数の話でいえば，同じ剰余類に属することに相当している．（実は整式の世界においても $p(x)$ を法とする剰余系といった考え方ができる）本問において，x^3，x^4 を $p(x)$ で割った余りを ax^2+bx+c，$a'x^2+b'x+c'$ とおくなどして不要な文字を導入するとかえってわかりにくくなるので注意すること．

8

【解答】

$g(x)=f(x)-x^2$ とおくと，$g(x)$ は3次式で

$$g(1)=f(1)-1^2=1-1=0.$$

同様にして，$g(2)=0$，$g(3)=0$ も成り立つから，

$$g(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)\quad (a \text{ は定数})$$

とかける．したがって

$$f(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)+x^2.$$

ここで，$f(4)=34$ を用いると

$$6a+16=34. \qquad \therefore\quad a=3.$$

よって，

$$f(x)=3(x-1)(x-2)(x-3)+x^2.$$

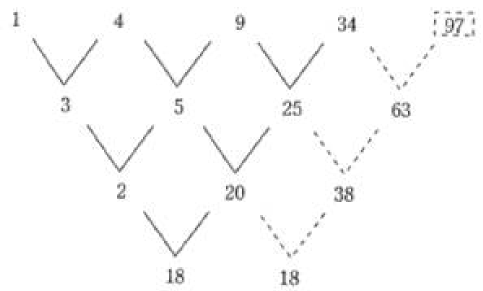
$$\therefore\quad f(5)=3\cdot4\cdot3\cdot2+5^2=97.$$

㊟ラグランジュの補間

$$f(x)=A(x-2)(x-3)(x-4)+B(x-1)(x-3)(x-4)$$
$$+C(x-1)(x-2)(x-4)+D(x-1)(x-2)(x-3)$$

のようにおくと，A，B，C，D は容易に求めることができる．

また，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$，$f(5)$ を数列とみなして $f(x)$ を求めることなしに $f(5)$ の値を求めることも可能だ．



（$f(x)$ が3次式なので第3階差が定数列になることに注意）