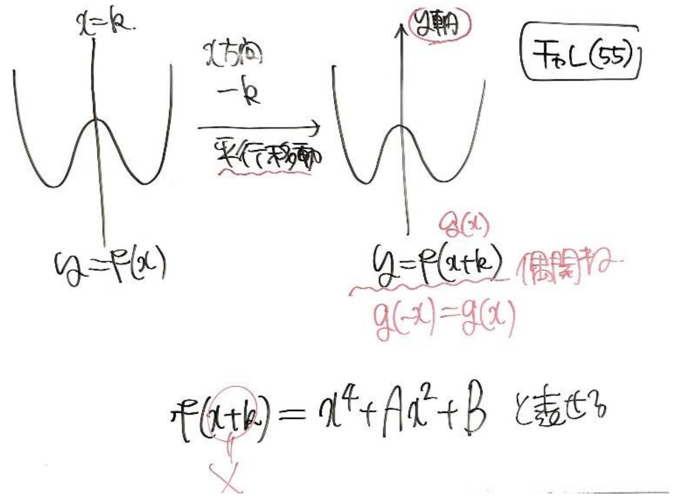
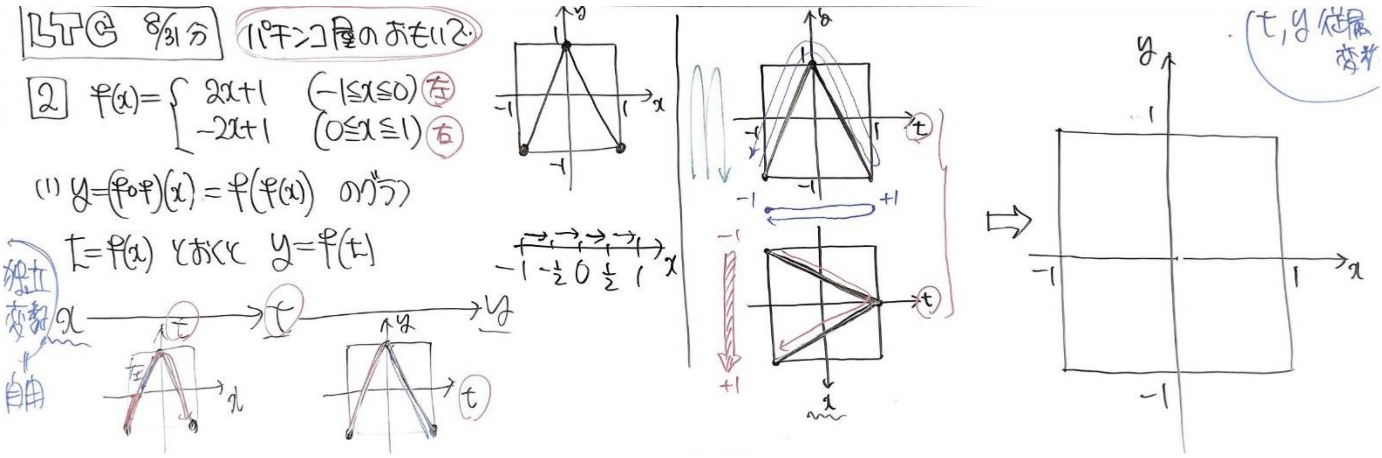
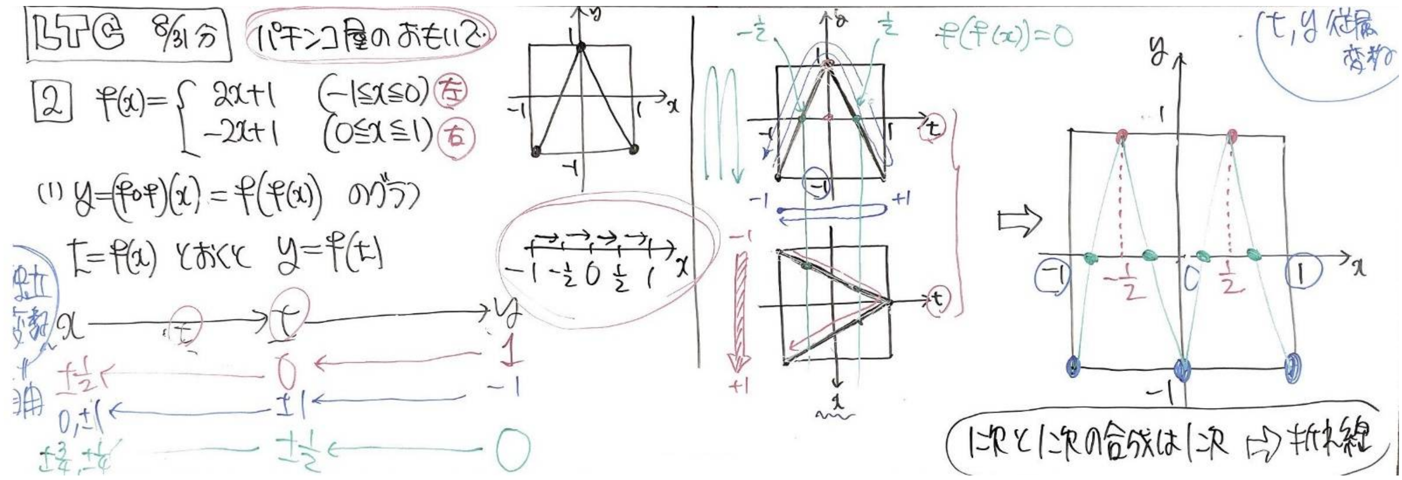
zemik2020-09-01（board）







444 (3) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-\left[\frac{n}{2}\right]}-n\right)=\boxed{?}$　小数

ここで $[x]$ は x を超えない最大の整数.

← $x>0$ なら 整数部分　小数部分キリステル

(注) 答だけなら $n\to\infty$ より $\left[\frac{n}{2}\right]\fallingdotseq\frac{n}{2}$ より.

(与式) $=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-\frac{n}{2}}-n\right)$ を計算して出せる

わかりやすいが役立たず → $\boxed{[x]\leqq x<[x]+1}$ より

わかりにくいが役立つ → $x-1<[x]\leqq x$

$\frac{n}{2}-1<\left[\frac{n}{2}\right]\leqq\frac{n}{2}$　適当にキリステル

$-\frac{n}{2}\leqq-\left[\frac{n}{2}\right]<-\frac{n}{2}+1$　（各辺に n^2 を加える）

$\sqrt{n^2-\frac{n}{2}}-n\leqq\sqrt{n^2-\left[\frac{n}{2}\right]}-n<\sqrt{n^2-\frac{n}{2}+1}-n$

(左辺) $=\dfrac{-\frac{n}{2}}{\sqrt{n^2-\frac{n}{2}}+n}\to-\frac{1}{4}\ (n\to\infty)$

(右辺) $=\dfrac{-\frac{n}{2}+1}{\sqrt{n^2-\frac{n}{2}+1}+n}\to-\frac{1}{4}\ (n\to\infty)$

極限をとって

$-\frac{1}{4}\leqq\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\ }-n\right)\leqq-\frac{1}{4}$

(はさみうちの原理より)

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-\left[\frac{n}{2}\right]}-n\right)=-\frac{1}{4}$

$a_n<b_n$

$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n\leqq\lim_{n\to\infty}b_n$

---

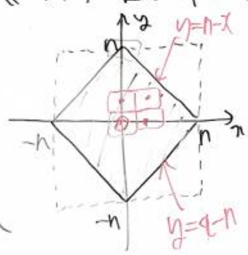
445 n：自然数　②　いくら

a_n：$|x|+|y|\leqq n$ に含まれる格子点の個数

$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}=\boxed{?}$

インチキくさい

《考察》答だけなら

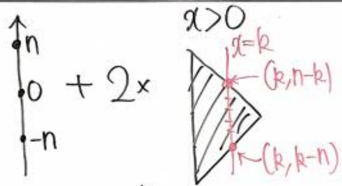


格子点1コ ⟷ 面積1

$a_n\fallingdotseq\dfrac{(2n)^2}{2}=2n^2$

より $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}=2$

$a_n=$



$x=k$ 上の格子点は

$(n-k)-(k-n)+1$

$=2n-2k+1$

$=(2n+1)+2\times\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)$

$=(2n+1)+2\cdot\sum_{k=1}^{n}\{(2n+1)-2k\}$

$=(2n+1)+2n(2n+1)-4\times\dfrac{n(n+1)}{2}$

$=2n^2+2n+1$

$\therefore\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2n+1}{n^2}$

$=2$

---

446 $a_n=\sqrt{(n-1)(4n-1)}+cn$　← $\infty+c\times\infty$

$\{a_n\}$ が収束するとき $c=\boxed{-2}$, $\lim_{n\to\infty}a_n=\boxed{-\frac{5}{4}}$

Level-1.　いきなり 有理化

② $c<0$ が必要 $\Rightarrow$ 有理化　○

$\infty-\infty$

記述ではグレーゾーン

3　$a_n=\sqrt{4n^2-5n+1}-\boxed{2n}$ ⇒ 有理化

4　$a_n=\sqrt{\left(2n-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{16}}-\boxed{2n}$ ⇒ $-\frac{5}{4}$

$2n-\frac{5}{4}$

---

447 真偽の判定，偽なら反例を。

$\infty\times0$

(1) $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ ⇨ $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$

無限大　無限小

偽　反例　$a_n=n^2$, $b_n=\frac{1}{n}$

(2) $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ ⇨ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

偽　反例　$a_n=b_n=\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}$ は偽

収束する数列の 極限の式では 和・差・積・商をバラせる　ただし 分母≠0に注意

p.246 $\boxed{3}$

(3) $b_n < a_n < c_n$, $\lim_{n\to\infty}(c_n-b_n)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n$ は収束

小　中　大　　　　小ー大　　　∞かも

∞−∞かも

偽　反例は

$b_n=n,\ a_n=n+\frac{1}{n},\ c_n=n+\frac{2}{n}$

(4) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$

バラしちゃダメ

真　証明　　$b_n=a_n-(a_n-b_n)$ より

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$$

$$=\alpha-0=\alpha$$

447 真偽の判定，偽なら反例を

$\infty\times 0$

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_nb_n=0$

無限大　　無限小

偽　反例　$a_n=n^2$, $b_n=\frac{1}{n}$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$

偽　反例　$a_n=b_n=\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ は偽

$x=l$ 上の格子点は　$0\leqq y\leqq n-l^2$ より　$n-l^2+1$

$k \fallingdotseq \sqrt{n}$

$k=[\sqrt{n}]$

$$\therefore a(n)=n+1+2\times\sum_{l=1}^{k}(n+1-l^2)$$

$$=n+1+2k(n+1)-\frac{1}{3}k(k+1)(2k+1)$$

$$=(n+1)(2k+1)-\frac{1}{3}k(k+1)(2k+1)$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a(n)}{\sqrt{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2\cdot\boxed{\frac{k}{\sqrt{n}}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$　←$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{k}{\sqrt{n}}=1\right)$

$n\times\sqrt{n}$
$\|$
$\sqrt{n}\times\sqrt{n}\times\sqrt{n}$

$$-\frac{1}{3}\times\boxed{\frac{k}{\sqrt{n}}}\times\left(\boxed{\frac{k}{\sqrt{n}}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\times\left(2\times\boxed{\frac{k}{\sqrt{n}}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

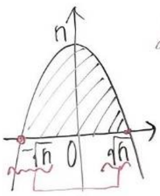
$$=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

448 n：正整数　ただし境界を含むものとする

D：$y=n-x^2$ と x 軸で囲まれる領域

$a(n)$：D に含まれる格子点の数

《考察》(2)の答だけなら　$\boxed{\cdot}$ いくら



整数とは限らない

$a(n)\fallingdotseq D$ の面積

$$=\frac{1}{6}(\sqrt{n}-(-\sqrt{n}))^3$$

$$=\frac{4}{3}n^{\frac{3}{2}}$$ より

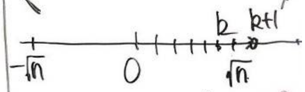
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(n)}{\sqrt{n^3}}=\frac{4}{3}$$

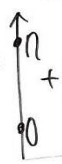
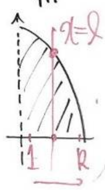
(1) $k=[\sqrt{n}]$ とおく.

$\boxed{[\sqrt{n}]\leqq\sqrt{n}<[\sqrt{n}]+1}$

$k\leqq\sqrt{n}<k+1$

$\sqrt{n}-1<k\leqq\sqrt{n}$



$a(n)=$  $+2\times$ 

$\because k=[\sqrt{n}]$ より　$[\sqrt{n}]\leqq\sqrt{n}<[\sqrt{n}]+1$

$\sqrt{n}-1<[\sqrt{n}]\leqq\sqrt{n}$

$\sqrt{n}-1<k\leqq\sqrt{n}$

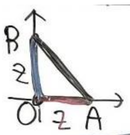
$1-\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{k}{\sqrt{n}}\leqq 1$

極限とると　$1\leqq\lim_{n\to\infty}\frac{k}{\sqrt{n}}\leqq 1$

はさみうちの原理より　$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{\sqrt{n}}=1$

分野別 複素(2)

2 $O(0),\ A(1),\ B(i)$



キセキ x と y の式

$P(z)$: $\triangle OAB$ の辺上

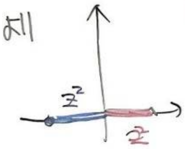
$Q(z^2)$ の軌跡を求めよ

文字設定

(i) Pが OA上のとき $z=t\ (0\leqq t\leqq 1)$ とおく

$z^2=t^2\ (0\leqq t^2\leqq 1)$ より

QもOA上



2019 慈恵の反転

~~極~~

(ii) Pが OB上のとき $z=ti\ (0\leqq t\leqq 1)$ とおく

$z^2=-t^2\ (0\leqq t^2\leqq 1)$ より $-1\leqq z^2\leqq 0$

$C(-1)$ とおくと QはOC上.

(iii) Pが AB上のとき 内分 $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}$

$z=t+(1-t)i\ (0\leqq t\leqq 1)$ と表せる.

$z^2=t^2-(1-t)^2+2i\times t(1-t)$

$z^2=x+yi$ とおくと

$$\begin{cases} x=t^2-(1-t)^2=2t-1 \\ y=2t(1-t) \end{cases}$$

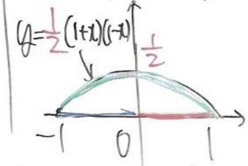
t 消去

$$y=2\times\frac{x+1}{2}\times\left(1-\frac{x+1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(1+x)(1-x)$$

ただし $0\leqq t\leqq 1$ より

$-1\leqq x\leqq 1$



---

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\times\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\times\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{}$$

3乗根の有理化

分子 $a-b$ 型 $\underbrace{\to}_{a^2+ab+b^2}$ a^3-b^3 へ.

分母 $a-b$ 型 $\underbrace{\to}_{a+b}$ a^2-b^2

$\Downarrow$ 工夫

$\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[2]{\ }$ が 混在

$a=\sqrt[6]{1+x},\ b=\sqrt[6]{1-x}$ とおくと

$\sqrt[3]{1+x}=a^2,\ \sqrt[3]{1-x}=b^2$

$\sqrt{1+x}=a^3,\ \sqrt{1-x}=b^3$

$$(\text{与式})=\lim_{x\to 0}\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3}\ \leftarrow\ \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{(a-b)}(a+b)}{\cancel{(a-b)}(a^2+ab+b^2)}$$

$x\to 0$ のとき $a\to 1,\ b\to 1$

$$(\text{与式})=\frac{2}{3}$$