zemis2020-10-13（board）

610 n：自然数

$\int_0^{\pi} |\sin nx + \sqrt{3}\cos nx|\,dx$ ← (合成 2, $\sqrt{3}$, $\frac{\pi}{3}$)　 5の時 $y=\cancel{|\cdots|}$ のグラフ

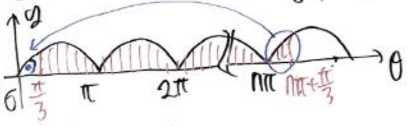
$= \int_0^{\pi} \left| 2\sin\left(nx+\frac{\pi}{3}\right)\right| dx$ ← $\theta = nx + \frac{\pi}{3}$　$\frac{d\theta}{dx} = n$

$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{n\pi+\frac{\pi}{3}} 2|\sin\theta| \times \frac{1}{n}\,d\theta$

$= \frac{2}{n} \int_{\frac{\pi}{3}}^{n\pi+\frac{\pi}{3}} |\sin\theta|\,d\theta$　　1山が n 個

$y = |\sin\theta|$

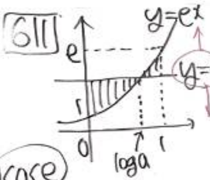
$= \frac{2}{n} \times$



$= \frac{2}{n} \times 2n$

$= 4$

611



Kace

(注 はみ出しけずり論法により!! $\log a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ で min と予想,)

$g(x) = e^x - a$,

$G(x) = e^x - ax$ とおくと $(G'(x) = g(x))$

$\begin{cases} G(0) = 1. \\ G(1) = e - a \\ G(\log a) = e^{\log a} - a\cdot\log a \end{cases}$

$= a - a\cdot\log a$

同一関数の積分 ⇨ 文字おき

$f(a) = \int_0^1 |e^x - a|\,dx.$

$= \left[-G(x)\right]_0^{\log a} + \left[+G(x)\right]_{\log a}^{1}$

$= -2G(\log a) + G(0) + G(1)$

$= -2(a - a\log a) + e - a$

$= 2a\log a - 3a$

612

$f'(a) = 2\left(1\cdot\log a + a\times\frac{1}{a}\right) - 3$

$= 2\log a - 1$

$f'(a) = 0 \Leftrightarrow \log a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \sqrt{e}$

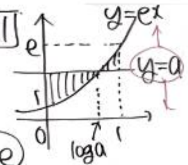
(増減表略)　$a = \sqrt{e}$ で最小値

$f(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e}\cdot\log\sqrt{e} - 3\sqrt{e} + e + 1$

$= e - 2\sqrt{e} + 1$　(答)

$= (\sqrt{e} - 1)^2$

611



Kace

(注 はみ出しけずり論法により!! $\log a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ で min と予想,)

$g(x) = e^x - a$,

$G(x) = e^x - ax$ とおくと $(G'(x) = g(x))$

$\begin{cases} G(0) = 1. \\ G(1) = e - a \\ G(\log a) = e^{\log a} - a\cdot\log a \end{cases}$

$= a - a\cdot\log a$

同一関数の積分 ⇨ 文字おき

$f(a) = \int_0^1 |e^x - a|\,dx.$

$= \left[-G(x)\right]_0^{\log a} + \left[+G(x)\right]_{\log a}^{1}$

$= -2G(\log a) + G(0) + G(1)$

$= -2(a - a\log a) + e - a + $

$= 2a\log a - 3a + e + 1$

$f'(a) = 2\left(1\cdot\log a + a\times\frac{1}{a}\right) - 3$

$= 2\log a - 1$

$f'(a) = 0 \Leftrightarrow \log a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \sqrt{e}$

(増減表略)　$a = \sqrt{e}$ で最小値

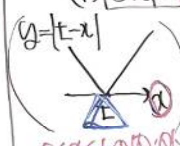
$f(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e}\cdot\log\sqrt{e} - 3\sqrt{e} + e + 1$

$= e - 2\sqrt{e} + 1$　(答)

$= (\sqrt{e} - 1)^2$

612 $f(t) = \int_0^1 |t - x| \times e^x\,dx$

(1) Step I x で積分 (t は定数扱い)



$0 \leqq x \leqq 1$ の内外

$f(t) = \begin{cases} (1-e)t + 1 & (t \leqq 0) \\ 2e^t - (e+1)t - 1 & (0 < t < 1) \\ (e-1)t - 1. & (t \geqq 1) \end{cases}$　左外　内　右外

(2) Step II t で微分

$f'(t) = \begin{cases} 1 - e \ \ominus & (t \leqq 0) \\ 2e^t - (e+1) & (0 < t < 1) \\ e - 1 \ \oplus & (t \geqq 1) \end{cases}$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$\log\frac{e+1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	×	$-$	0	$+$	×	$+$
$f(t)$	↘		↘		↗		↗

$f(t)$ は連続関数だから

最小値

$f\left(\log\frac{e+1}{2}\right) = \cdots$

$= e - (e+1)\log\frac{e+1}{2}$

613 (1)
$$\begin{cases} I_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\sin x\,dx \\ J_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\cdot\cos x\,dx \end{cases}$$
→ 部分積分でもOK

$$\begin{cases} (e^{-x}\sin x)'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x \\ (e^{-x}\cos x)'=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x \end{cases}$$

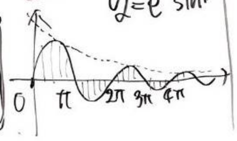
$$I_k+J_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}(\sin x+\cos x)\,dx$$
$$=-\left[e^{-x}\cos x\right]_{(k-1)\pi}^{k\pi}$$
$$=-e^{-k\pi}\cdot\underbrace{\cos k\pi}_{(-1)^k}+e^{-(k-1)\pi}\cdot\underbrace{\cos(k-1)\pi}_{(-1)^{k-1}}$$
$$=(-1)^{k-1}\left(e^{-k\pi}+e^{-(k-1)\pi}\right)$$

$$I_k-J_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\left(e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x\right)dx$$
$$=-\left[e^{-x}\sin x\right]_{(k-1)\pi}^{k\pi}=0$$

∴ $\{I_k+J_k\}$ は等比数列.

$$I_k+J_k=(-1)^{k-1}\times e^{-(k-1)\pi}\left(e^{-\pi}+1\right)$$
$$=\underbrace{(1+e^{-\pi})}_{初項}\times\underbrace{(-e^{-\pi})}_{公比}{}^{k-1}$$

$y=e^{-x}\sin x$



テーマ 減衰曲線
ヨコ等差, タテ等比

(2) $\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx=\boxed{?}$

613 (1)
$$\begin{cases} I_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\sin x\,dx \\ J_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\cdot\cos x\,dx \end{cases}$$
→ 部分積分でもOK

$$\begin{cases} (e^{-x}\sin x)'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x \\ (e^{-x}\cos x)'=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x \end{cases}$$

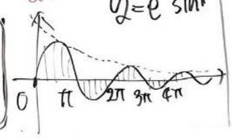
$$I_k+J_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}(\sin x+\cos x)\,dx$$
$$=-\left[e^{-x}\cos x\right]_{(k-1)\pi}^{k\pi}$$
$$=-e^{-k\pi}\cdot\underbrace{\cos k\pi}_{(-1)^k}+e^{-(k-1)\pi}\cdot\underbrace{\cos(k-1)\pi}_{(-1)^{k-1}}$$
$$=(-1)^{k-1}\left(e^{-k\pi}+e^{-(k-1)\pi}\right) \quad ①$$

$$I_k-J_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\left(e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x\right)dx$$
$$=-\left[e^{-x}\sin x\right]_{(k-1)\pi}^{k\pi}=0 \quad ②$$

∴ $\{I_k+J_k\}$ は等比数列.

$$I_k+J_k=(-1)^{k-1}\times e^{-(k-1)\pi}\left(e^{-\pi}+1\right)$$
$$=\underbrace{(1+e^{-\pi})}_{初項}\times\underbrace{(-e^{-\pi})}_{公比}{}^{k-1}$$

$y=e^{-x}\sin x$



テーマ 減衰曲線
ヨコ等差, タテ等比

(2) $\lim_{n\to\infty}\underbrace{\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx}_{S_n}=\boxed{?}$

$S_n=\int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin x|\,dx$ とおく.
$$=\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}+\int_{2\pi}^{3\pi}+\cdots\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-x}|\sin x|\,dx$$
$$=\sum_{k=1}^{n}I_k \leftarrow \frac{①+②}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{(1+e^{-\pi})}_{初項}\cdot\underbrace{(-e^{-\pi})}_{公比}{}^{k-1}$$

求める $\lim_{n\to\infty}S_n$ は
初項 $1+e^{-\pi}$, 公比 $-e^{-\pi}$ の無限等比 ← 級数

公比 $|+e^{-\pi}|<1$ より収束

その和は $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\times\frac{1+e^{-\pi}}{1-(+e^{-\pi})}$
$$=\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$$

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-x}|\sin x|\,dx$$
sinxが定符号
$$=\left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-x}\sin x\cdot dx\right|$$
$$=|I_k|$$

テーマ 減衰曲線
ヨコ等差, タテ等比

(2) $\lim_{n\to\infty}\underbrace{\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx}_{S_n}=\boxed{?}$

部分和

$S_n=\int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin x|\,dx$ とおく.

絶対値のはずし方で場合分け
$$=\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}+\int_{2\pi}^{3\pi}+\cdots\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-x}|\sin x|\,dx$$
$$=\sum_{k=1}^{n}|I_k| \leftarrow \frac{①+②}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{(1+e^{-\pi})}_{初項}\cdot\underbrace{(+e^{-\pi})}_{公比}{}^{k-1}$$

$a_n=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$ において

$\begin{cases} x:(k-1)\pi \to k\pi \\ t: 0 \longrightarrow \pi \end{cases}$ となる置換 $\boxed{t=x-(k-1)\pi}$ を考える

$a_n=\int_0^{\pi} e^{-t-(k-1)\pi}\cdot|\sin(t+(k-1)\pi)|\times dt$

$\quad = e^{-(k-1)\pi}\boxed{\int_0^{\pi}e^{-t}|\sin t|\,dt} = a_1$

$a_n=a_1\times(e^{-\pi})^{k-1}$ 公比

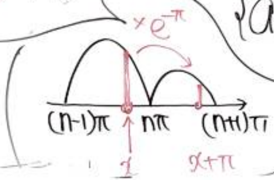
初項 $a_1=\int_0^{\pi}e^{-x}|\sin x|\,dx$

$=\cdots\cdots=1+e^{-\pi}$

以下略

$f(x)=e^{-x}|\sin x|$ とおく

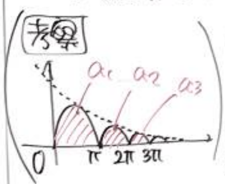
$f(x+\pi)=e^{-\pi}f(x)$



《補足》 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin x|\,dx=\boxed{?}$

が誘導なしで出題されたら…

考察



$a_n=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-x}|\sin x|\,d$ とおくと

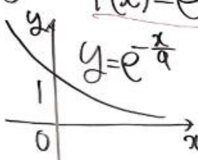
(与式) $=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$

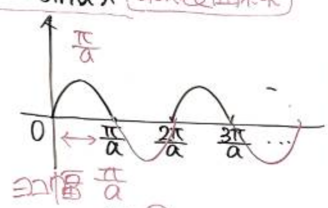
$\{a_n\}$ が等比数列であることを証

公比は $\boxed{e^{-\pi}}$ と予想

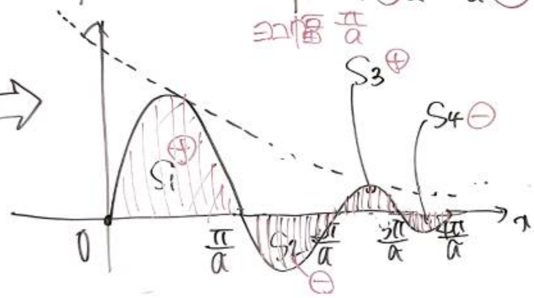
---

1 $a>0$ $f(x)=e^{-\frac{x}{a}}\times\sin ax$ 減衰曲線





⇨



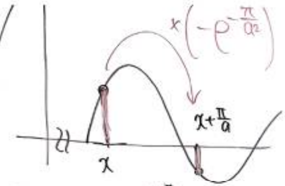
[1] $x_m=\frac{m\pi}{a}$

[2] $\{S_k\}$ は等比数列です

初項 $S_1=\cdots$ 部分Ⓣ

公比は $\boxed{-e^{-\frac{\pi}{a^2}}}$

$\begin{cases}\text{解①} & \text{減衰から予想} \\ \text{解②} & \text{チカンⓉ} \\ \text{解③} & S_k\text{を部分Ⓣ}=S_1\times(\ )^{k-1}\text{型}\end{cases}$



$f\left(x+\frac{\pi}{a}\right)=e^{-\frac{x+\frac{\pi}{a}}{a}}\times\sin(ax+\pi)$

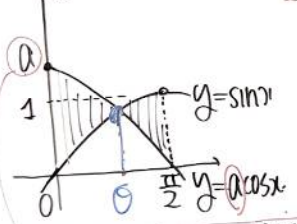
$=e^{-\frac{x}{a}-\frac{\pi}{a^2}}\times(-\sin ax)$

$=\boxed{-e^{-\frac{\pi}{a^2}}}\times f(x)$

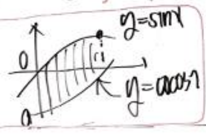
---

614 $f(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-a\cos x|\,dx$

差の絶対値に着目して図示



$a<0$ のとき



(i) $a\leqq0$ のとき

$f(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-a\cos x)\,dx$

$=\left[-\cos x-a\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=-a+1$

$f'(a)=-1$ より 減少

(ii) $a>0$ のとき

交点⇒連立 $\sin x=a\cos x$

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=a$ ——※

※の $0<x<\frac{\pi}{2}$ での解を θ とおく

$\tan\theta=a$ をみたす

$f(\theta)=\int_0^{\theta}(a\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\theta}^{1}(\sin x-a\cos x)\,dx$

$=\left[a\sin x+\cos x\right]_0^{\theta}+\left[-\cos x-a\sin x\right]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}$

$=2(a\sin\theta+\cos\theta)-a-1$

$=2\left(a\times\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)-a-1$

$\frac{a^2+1}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}$

$=2\sqrt{a^2+1}-a-1$

文字設定→条件式(変域)に注意