zemis2020-09-23（board）

527 直線 $\ell_t : y=-tx+e^t$

（t：全実数）の通過領域を求める.

FAXの原理 xを固定して

yをtの関数とみなす.

$y=f(t)=-x\,t+e^t$ とおく

$f'(t)=-x+e^t=e^t-x$

$f'(t)=0$ となるのは $e^t=x$

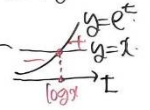
つまり $t=\log x$ のとき

⊕が必要

$a^{\log_a b}=b$

(i) $x>0$のとき $f'(t)=0 \iff t=\log x$

t	$\cdots$	$\log x$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘		↗



最小値 $f(\log x)=-x\log x+x=x(1-\log x)$

端 $\left[\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{t\to\infty}(e^t-x\cdot t)=\infty\right]$

$\lim_{t\to-\infty} f(t)=\lim_{t\to-\infty}(e^t-x\cdot t)=\infty$ 　$0-(-\infty)$

(ii) $x<0$のとき $f'(t)=0$となるtは存在しない

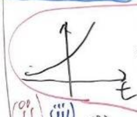
$f'(t)=e^t+(-x)>0$より 単調増加

右 $\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{t\to\infty}\{e^t+(-x)\cdot t\}=\infty$ 　$\infty+\infty$

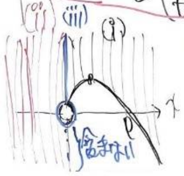
左 $\lim_{t\to-\infty} f(t)=\lim_{t\to-\infty}\{e^t+(-x)\cdot t\}=-\infty$

$f(t)$は全実数

(iii) $x=0$のとき $f(t)=e^t>0$



$\begin{cases}\lim_{t\to\infty} f(t)=\infty\\ \lim_{t\to-\infty} f(t)=0\end{cases}$



図の斜線部

y軸上$y\leqq 0$は含まない

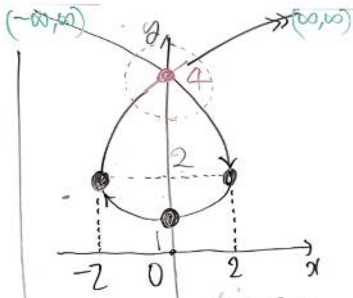
532 増減・凹凸，和のグラフ

533 $\begin{cases}x=t^3-3t\\ y=t^2+1\end{cases}$

左右 $\dfrac{dx}{dt}=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$

上下 $\dfrac{dy}{dt}=2t$

t	$(t\to-\infty)$ $\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$ $(t\to+\infty)$
dx/dt	$+$ 右	0	$-$ 左	$-$	$-$	0	$+$ 右
dy/dt	$-$ 下	$-$	$-$	0	$+$ 上	$+$	$+$
(x,y)	↘ $(-\infty,\infty)$	$(2,2)$ ↙		$(0,1)$	↖	$(-2,2)$	↗ (∞,∞)



y軸との交点は $x=0$より

$t=0,\ \pm\sqrt{3}$

$t=\pm\sqrt{3}$のとき $(0,4)$

$t=0$ のとき $(0,1)$

（ヒマな人用の問題）

$y=\sqrt[3]{x^3-x^2}$

3乗根のグラフ

「 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ の増減＆グラフ ~~凹凸~~

分母$\neq 0$より 漸近線 $x=1,\ x=-1$ 　タテ

$\dfrac{3次}{2次}$ ⇨ わりざん 　$f(x)=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ 　ナナメ

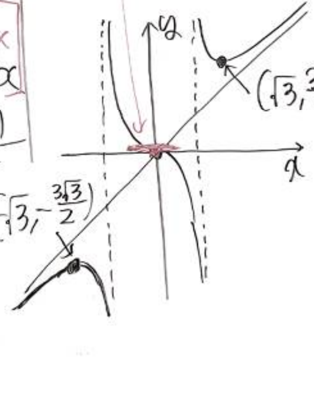
$\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=0$より 漸近線 $y=x$

$f'(x)=\dfrac{3x^2\cdot(x^2-1)-x^3\times 2x}{(x^2-1)^2}=\cdots=\dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$

$f(-x)=-f(x)$より 　$f(x)$は奇関数

$y=f(x)$は原点対称

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	╳	$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	╳	↘		↗



（ヒマな人用の問題）

$y=\sqrt[3]{x^3-x^2}$

3乗根のグラフ

QUIZ 分母$=0$のところで

必ずタテ漸近線をもつ

タテ漸近線をもつとは限らない

QUIZ 分母$=0$のところで

- 必ず漸近線をもつ
- 漸近線をもつとは限らない

⇒

分母$=0$のところで

~~必ず漸近線をもつ~~

漸近線をもつとは限らない

$y=\frac{\sin x}{x}$ $(x\neq 0)$

---

535 $y^2=x^2(4-x^2)$

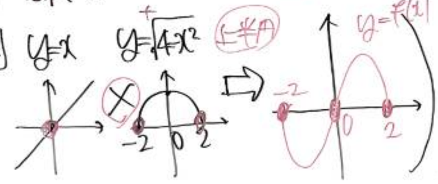
《考察》陰関数について　2十分
大学受験では、接線、法線程度

$y=\pm x\sqrt{4-x^2}$

ルート内$\geqq 0$より　$-2\leqq x\leqq 2$

$f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ とおくと　$y=\pm f(x)$　x軸対称

予想　$y=x$　$y=\sqrt{4-x^2}$ 上半円



$f(x)=x(4-x^2)^{\frac{1}{2}}$ より

$f'(x)=1\times(4-x^2)^{\frac{1}{2}}+x\times\frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\times(-2x)$

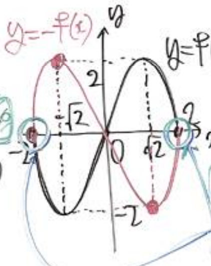
$=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$

√を含むグラフでは、端点で接線が直立する（傾き±∞）

$f'(x)=0 \iff x=\pm\sqrt{2}$

x	-2	…	$-\sqrt{2}$	…	$\sqrt{2}$	…	2
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-\infty$
$f(x)$	0	↘	-2	↗	2	↘	0

$\lim_{x\to\pm 2} f'(x)=-\infty$



接線直立
なめらかにつながる

---

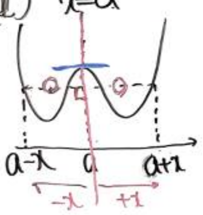
536 抽象関数の練習

点対称 ⇒ 中点利用
線対称 ⇒ 垂直&二等分条件

別解あり

注 原点対称⇒奇関数，y軸対称⇒偶関数

(1) $x=a$



(x：任意)

条件より $f(a+x)=f(a-x)$

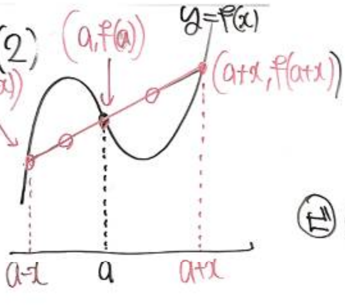
xで微分する　合成ビ

$f'(a+x)=f'(a-x)\times(-1)$

$x=0$代入　$f'(a)=-f'(a)$

よって $\boxed{f'(a)=0}$

(2)



条件より

$\frac{f(a+x)+f(a-x)}{2}=f(a)$

ビ $f(a+x)+f(a-x)=2f(a)$

$f'(a+x)+f'(a-x)\times(-1)=0$

ビ $f'(a+x)=f'(a-x)$

$f''(a+x)=f''(a-x)\times(-1)$

$x=0$代入　$f''(a)=-f''(a)$

よって $f''(a)=0$

変曲点の必要条件

補充問題 $y=\sqrt[3]{x^3-x^2}$ の増減&グラフ

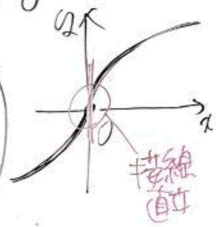
全義域は全実数

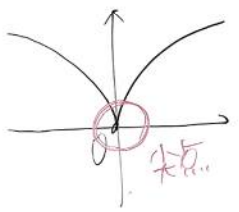
$\sqrt[3]{x^2(x-1)}=\sqrt[3]{x^2}\times\sqrt[3]{x-1}$

(部品) $y=\sqrt[3]{x}$ $\xrightarrow{2乗}$ $y=\sqrt[3]{x^2}\geq 0$

$\Leftrightarrow y^3=x$

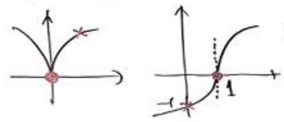
逆 $y=x^3$



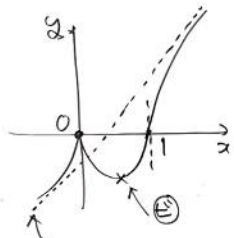


(予想)

$y=\sqrt[3]{x^2}$ × $y=\sqrt[3]{x-1}$



⇨



実は $\sqrt[3]{3次}\fallingdotseq 1次$ ($+x$ 漸近線まで)

68講

$\boxed{537}$ 3個 (記述コメント 次回)

$\boxed{538}$ (1)略 (2) $k<0,\ k=e$

$\boxed{539}$ (1)略 (2) $99^{101}>101^{99}$

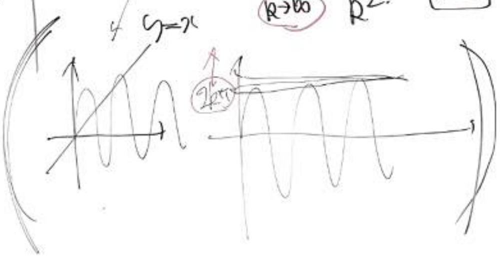
542、543、($\boxed{544}$ 難)

$\boxed{544}$ hint $k>0$

$x=2k\pi\cdot\sin x$ $(x\geq 0)$の

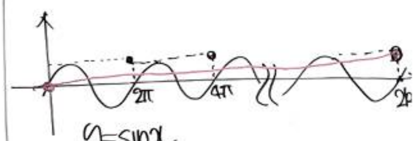
全ての解の和 $S(k)$

⇨ $\lim_{k\to\infty}\frac{S(k)}{k^2}=\boxed{?}$



$\frac{1}{2k\pi}x=\sin x$

$y=\frac{1}{2k\pi}x$



$y=\sin x$

1 (1) $\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}=\int_1^3\frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx$ 平方完成

$\boxed{x-2=2\sin\theta}$

$x: 1\to 3$

$x-2: -1\to 1$

$\sin\theta: -\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$

$\theta: -\frac{\pi}{6}\to\frac{\pi}{6}$

$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2|\cos\theta|}\times 2\cos\theta d\theta$

$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}1\cdot d\theta=\boxed{\frac{\pi}{3}}$

3 (1) $\int_1^4\frac{1}{x^2-2x+4}dx=\int_1^4\frac{1}{(x-1)^2+3}dx$

$\boxed{x-1=\sqrt{3}\tan\theta}$

$x: 1\to 4$

$x-1: 0\to 3$

$\tan\theta: 0\to\sqrt{3}$

$\theta: 0\to\frac{\pi}{3}$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3(1+\tan^2\theta)}\times\sqrt{3}(1+\tan^2\theta)d\theta$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}1\cdot d\theta=\boxed{\frac{\sqrt{3}\pi}{9}}$

4 $\int\frac{x^3}{(x-1)^3(x-2)}dx$ (BBB)

$\frac{a}{(x-1)}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{(x-1)^3}+\frac{d}{x-2}$

$\sqrt{r^2-x^2}$ ⇨ $x=r\sin\theta$

$\frac{1}{x^2+a^2}$ ⇨ $x=a\tan\theta$

$\int_0\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

$x=2\sin\theta$