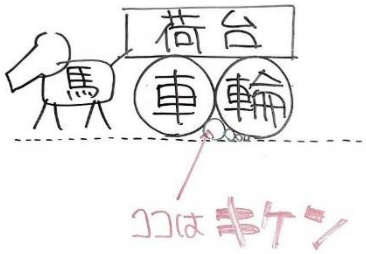
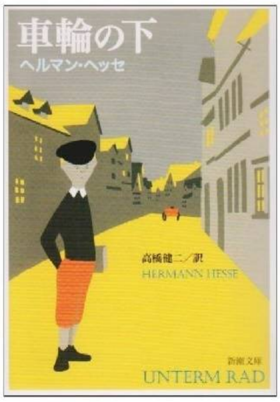
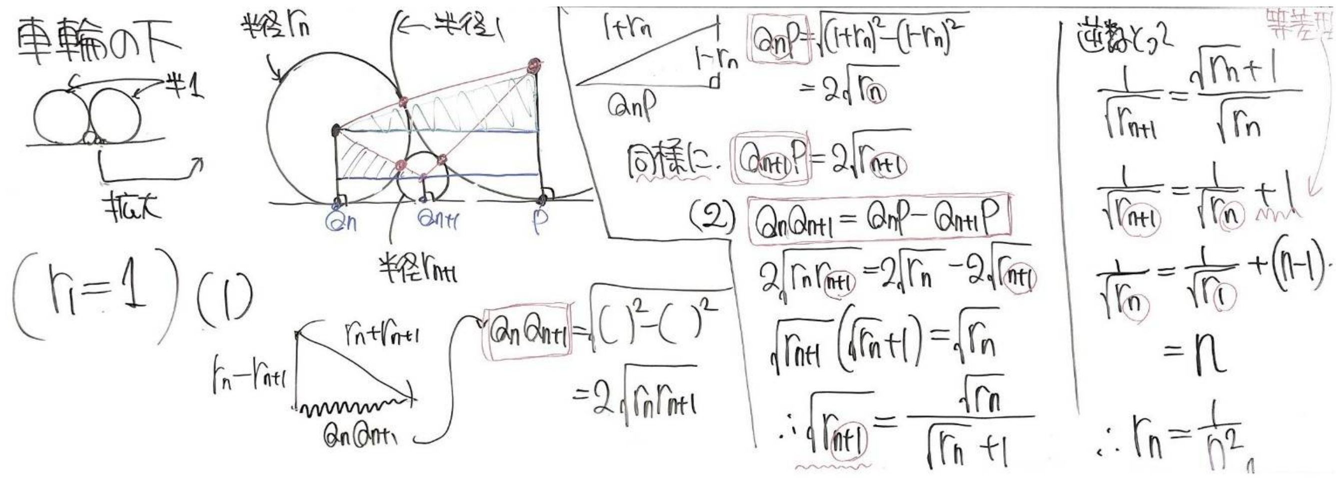
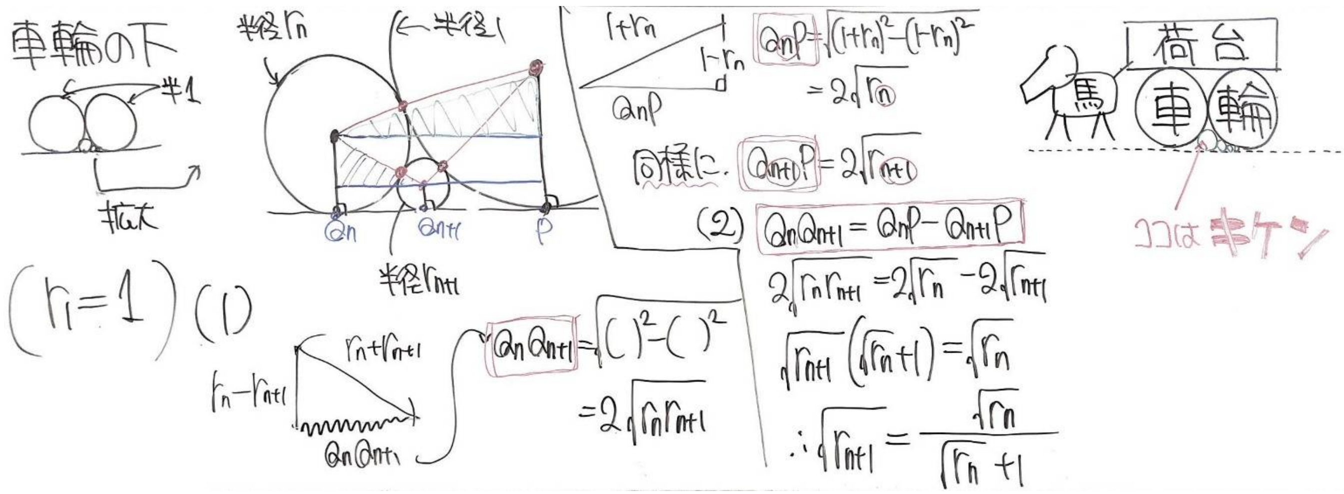
zemik2020-09-07（board）









注 $\sqrt{r_n}=\sqrt{r_{n+1}}+\sqrt{r_n\cdot r_{n+1}}$

$\div\sqrt{r_n r_{n+1}}$

$$\frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}=\frac{1}{\sqrt{r_n}}+1$$

~~2乗~~ ちらかる

$\boxed{461}\leftarrow\boxed{458}$ のはさみうち版　(3) 2

$\boxed{462}$ 部分和が『かけずらし』で求まる　$\frac{9}{4}$

注 $|r|<1$ のとき $\lim_{n\to\infty} n r^n = 0$　優先

$\infty\times 0$ (1次×指数)

$\boxed{463}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} \boxed{n a_n} = 0$

条件より $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$　$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ もわかる

[当然 $\lim_{n\to\infty}\boxed{(n+1)a_{n+1}}=0$, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 1$]

$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 1$ を証明　添え字ズレ

(左辺) $=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} k\times(a_k - a_{k+1})$　$n(a_n - a_{n+1})$

Abelの変型

$=\lim_{n\to\infty}\{1\times(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+3(a_3-a_4)+\cdots$

ズレ

$=\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n - n\cdot a_{n+1})$

$=\lim_{n\to\infty}\{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+a_{n+1}-\boxed{(n+1)a_{n+1}}$

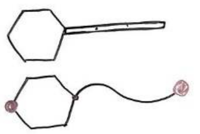
$=\lim_{n\to\infty}\{\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} a_k}_{\to 1} - \underbrace{\boxed{(n+1)\cdot a_{n+1}}}_{\to 0}\} = 1 = $ (右辺)

$\boxed{464}$ 題意の把握

$n=3$ のときで図が描いてある

(1) 棒

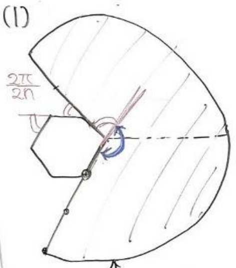
(2) ひも



周長 2 の正 $2n$ 角形に長さ 1 の棒またはひもの端が頂点につけられている

$\boxed{r\ \theta} = \pi r^2\times\frac{\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}r^2\theta$

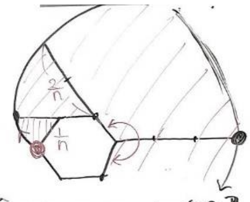
(1)



半径1. 中心角 $\frac{2\pi}{2n}+\pi$ のおうぎ形の面積 T とおく

$T=\frac{1}{2}\times 1^2\times\left(\frac{\pi}{n}+\pi\right)=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(2)



[上半分のみ図示してある]

巻きつけた状態からひもをはがしていくと考えるとひもの通過する半径は

$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots \frac{n-1}{n}$, $\frac{n}{n}=1$　外角 $+\pi$

中心角は 半径 $\frac{k}{n}$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$ に対して 外角 $\frac{2\pi}{2n}=\boxed{\frac{\pi}{n}}$ となる

対称性および(1)より

$S_n = 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2\times\boxed{\frac{\pi}{n}}+T$

上下

$=\frac{\pi}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$=\frac{\pi}{n^3}\times\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

よって $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}$

$=\frac{5\pi}{6}$

$\boxed{チャレ(58)}\Rightarrow$ プリント

(1) r^{n+1} であるく等差型　$a_n = n\cdot(1-r)\cdot r^{n-1}$

(2) 部分和が『かけずらし』で求まる　$\frac{2r}{(1-r)^2}$

59講 $\boxed{465}$ $\frac{15}{4}$, $\frac{25}{14}$

$\boxed{466}$ $\frac{41}{333}$, $\frac{611}{495}$

$\boxed{467}$ 初項 $a=x$, 公比 $r=2-x$ とおく

$a=x=0$ のとき収束. 和 $S=0$　吸収

$a\neq 0$ でも $|r|<1 \Leftrightarrow 1<x<3$

のとき収束 和 $S=\frac{x}{1-(2-x)}=\frac{x}{x-1}$

$x=0$, $1<x<3$ のとき収束し, 和は $\frac{x}{x-1}$

$\boxed{468}$ 初項 a, 公比 r とおく $(a\neq 0)$

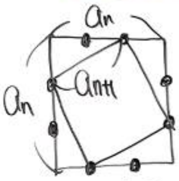
収束するから $-1<r<1$ が必要 —㊟

$$\begin{cases} ar=3 \\ \frac{a}{1-r}=-4 \end{cases}$$

連立して $r=-\frac{1}{2}$, ~~$\frac{3}{2}$~~　㊟より不適

㊟より $(a, r)=\left(-6, -\frac{1}{2}\right)$

$\boxed{469}$ T_n の一辺を a_n, 面積を S_n とおくと



$a_1=1$, $S_1=1$

$a_{n+1}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}a_n\right)^2+\left(\frac{1}{3}a_n\right)^2}$

$\therefore a_{n+1}=\frac{\sqrt{5}}{3}a_n$　等比型

よって $a_n=\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{n-1}$

$S_n=a_n^2=\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}$

求めるものは 初項 $S_1=1$, 公比 $\frac{5}{9}$ の無限等比級数より

公比 $\left|\frac{5}{9}\right|<1$ より収束

和は $\frac{1}{1-\frac{5}{9}}=\frac{9}{4}$

470 n：自然数

(1) $n! \geqq 2^{n-1}$ を証明 ＜(i) $n \geqq 2$ のとき

(左辺)：$n! = n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$

$\geqq 2\times2\times2\times\cdots\times2\times2\times1$

$= 2^{n-1}$：(右辺) ~~証明終~~

(ii) $n=1$ のとき 両辺 1 より成立 ∎

注 安全策 $\boxed{\text{数学的帰納法}}$

(2) $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<3$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<3$ を証明 $\begin{pmatrix}0!=1\\1!=1\end{pmatrix}$

(左辺)：$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{1}{0!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$ ← (1)

$\leqq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$

$=1+\frac{1\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}$

$=3-2\left(\frac{1}{2}\right)^n<3$：(右辺) ∎

$<1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}=3$ としてもよい

$\boxed{{}_nP_k=\frac{n!}{(n-k)!}} \xrightarrow{n=k} \boxed{{}_nP_n=\frac{n!}{0!}}$

《補足》実は

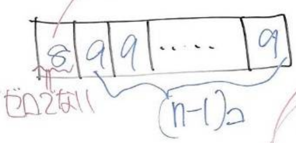
$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\boxed{e}$?

2.718……

マクローリン展開

$e^x \approx \frac{1}{0!}+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$

472 (1) n ケタの自然数で、各位の数は 1 でない



$8\times9^{n-1}$ 個

(2) 調和の和 → ∞
(1)より ケタごとに
計算

(2) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}+\cdots \Rightarrow \infty$ (有名事実)

⇓ 数字 1 を含むものをケズる

$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{9}}_{8つ}+\underbrace{\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{99}}_{8\times9}+\underbrace{\frac{1}{200}+\cdots+\frac{1}{999}}_{8\times9^2}+\cdots$

$<\frac{1}{2}\times8+\frac{1}{20}\times(8\times9)+\frac{1}{200}\times(8\times9^2)+\cdots$

$\times\frac{1}{10}\times9$　$\times\frac{1}{10}\times9$

$=\frac{4}{1-\frac{9}{10}}=40$

評価

$\log_{10}7$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$