zemik2020-09-09（board）

$\frac{0}{0}$ → s, c, t
$\frac{\infty}{\infty}$
$\infty-\infty$
$\infty\times 0$
$(1+0)^{\infty}$

指
数

e の定義
$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \iff \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$

$\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$ —※

$x=\log(1+t)$ とおく $t=e^{x}-1$

別証1 ロピタルの定理（検算用）

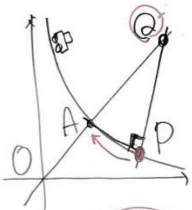
$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}}{1}=1$

de L'Hospital の定理

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\frac{\infty}{\infty}$ または $\frac{0}{0}$ に限る

480 $C: y=\frac{1}{x}$, $A(1,1)$



$P\left(p,\frac{1}{p}\right)$ とおく

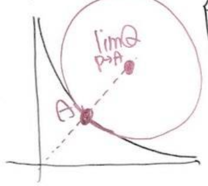
APの傾き

$\frac{\frac{1}{p}-1}{p-1}=\frac{1-p}{p(p-1)}=-\frac{1}{p}$

直線PQ: $y-\frac{1}{p}=p\times(x-p)$

直線OA: $y=x$ と連立

$x=\frac{p^{2}+p+1}{p}$



$P\to A$ とおると $p\to 1$ より

$\lim_{p\to 1} x=3$

点Qは $(3,3)$ に近づく //

板尾創路

ほんこん

130R

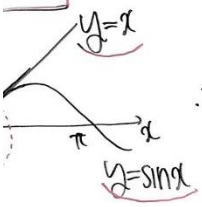
(2) $\frac{7}{4}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\times\frac{4x}{\sin 4x}\times\frac{7}{4}=\frac{7}{4}$

逆数

$=1$ のイメージ

$x\fallingdotseq 0$ のとき
$\sin x\fallingdotseq x$

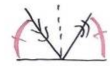


$\therefore \frac{\sin 7x}{\sin 4x}\fallingdotseq\frac{7x}{4x}\to\frac{7}{4}$

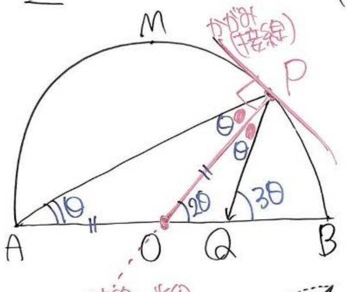
$(x\to 0)$

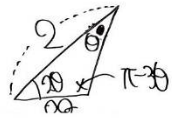
482 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2\sin x)}{\sin x}\fallingdotseq\frac{2x}{x}\ (x\fallingdotseq 0)$

$=2$



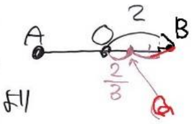
483
直径4





(1) 正弦定理より $\frac{2}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{OQ}{\sin\theta}$

$OQ=\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}$ //



(2) $P\to B$ のとき $\theta\to 0$ より

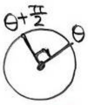
$\lim_{\theta\to 0}OQ=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}=\frac{2}{3}$

Qは OBを $1:2$ に内分する点
に近づく //

484 $\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1 \to \lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1$　$\lim\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2}$

(1) 4　(2) 2　(3) -1

(3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\tan x$ ← $\theta=x-\frac{\pi}{2}$ とおく.



$=\lim_{\theta\to0}\theta\times\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ ← tan=傾き

$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$

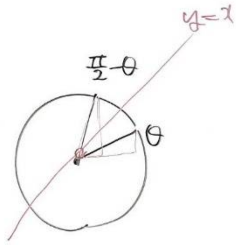
$=\lim_{\theta\to0}\left(-\frac{\theta}{\tan\theta}\right)=-1$

注 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cancel{\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{2}}{1-\tan\theta\cdot\tan\frac{\pi}{2}}}$ 存在しない!!

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$

485 (答) $a=4,\ b=-1$, 極限値 $-\frac{15}{8}$

$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{9-8x+7\cos2x}-(a+bx)}{x^2}$ が収束.



484 $\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1 \to \lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1$　$\lim\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2}$

(1) 4　(2) 2　(3) -1

(3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\tan x$ ← $\theta=x-\frac{\pi}{2}$ とおく.

$=\lim_{\theta\to0}\theta\times\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ ← tan=傾き

$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$

$=\lim_{\theta\to0}\left(-\frac{\theta}{\tan\theta}\right)=-1$

注 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cancel{\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{2}}{1-\tan\theta\cdot\tan\frac{\pi}{2}}}$ 存在しない!!

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$

485 (答) $a=4,\ b=-1$, 極限値 $-\frac{15}{8}$

$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{9-8x+7\cos2x}-(a+bx)}{x^2}$ が収束

分母→0

(分子) → $4-a=0$ が必要　$a=4$

$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\quad}-(4+bx)}{x^2}\times\frac{\sqrt{\quad}+(4+bx)}{\sqrt{\quad}+(4+bx)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(9-8x+7\cos2x)-(4+bx)^2}{x^2\times\{\sqrt{9-8x+7\cos2x}+(4+bx)\}}$

$\frac{0}{0}$ ⇒ 約分　公式(cos)

$=\lim_{x\to0}\frac{-b^2x^2-(8+8b)x-7+7\cos2x}{x^2\times\{\sqrt{\quad}+(\quad)\}}$ → 8

$8+8b\neq0$ のとき発散　$\frac{8+8b}{x}\to\pm\infty$

収束するから $8+8b=0$ が必要

$b=-1$

(与式) $=\lim_{x\to0}\left\{-\frac{x^2}{x^2}-7\times\frac{1-\cos2x}{x^2}\right\}\times\frac{1}{\sqrt{\quad}+(\quad)}$

1　$\frac{1}{2}\times4$　→8

$=-\frac{15}{8}$

過去問めぐり　2011 産医

1 (3) $\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[3]{(n^3-n^2)^2}-2n\cdot\sqrt[3]{n^3-n^2}+n^2\right]$　ココを有理化

$t=f(n)=\sqrt[3]{n^3-n^2}$ とおく　$t^3=n^3-n^2$

(与式) $=\lim_{n\to\infty}\left(t^2-2nt+n^2\right)$

$=\lim_{n\to\infty}(t-n)^2$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-n^2}-n\right)^2$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{t^3-n^3}{t^2+tn+n^2}\right\}^2$

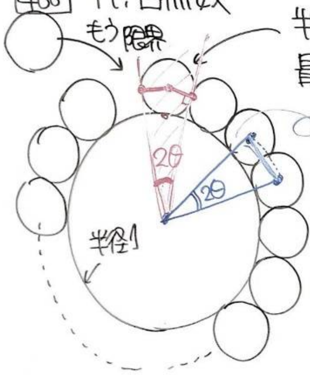
$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{-n^2}{\sqrt[3]{(n^3-n^2)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3-n^2}+n^2}\right\}^2$ ← $\frac{\infty}{\infty}$ $\left(\frac{2次}{2次}\right)$

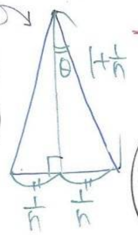
2次　2次

$=\left(\frac{-1}{1+1+1}\right)^2=\frac{1}{9}$

488 n: 自然数

半径$\frac{1}{n}$の円を外接させる最大個数を a_n とする。





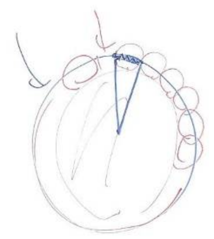
図のように θ をとると

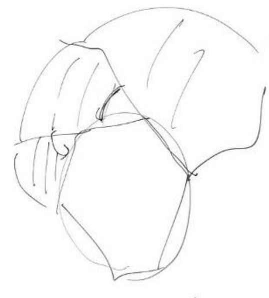
$$\sin\theta = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1}$$

$$a_n \fallingdotseq \frac{2\pi}{2\theta} \begin{array}{l} \leftarrow \boxed{中心角}\ 一周分 \\ \leftarrow 一個につき \end{array}$$

$$a_n = \left[\frac{2\pi}{2\theta}\right] = \left[\frac{\pi}{\theta}\right]$$

半 $1+\frac{1}{n}$ の円周を分割

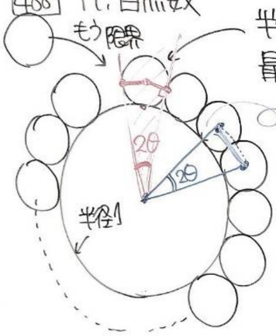


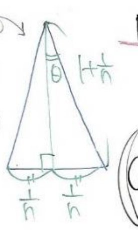


488 n: 自然数

半径$\frac{1}{n}$の円を外接させる最大個数を a_n とする。

θはnによって変化する





図のように θ_n をとると

$$\sin\theta_n = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1}$$

$$a_n \fallingdotseq \frac{2\pi}{2\theta} \begin{array}{l} \leftarrow \boxed{中心角}\ 一周分 \\ \leftarrow 一個につき \end{array}$$

$$a_n = \left[\frac{2\pi}{2\theta_n}\right] = \left[\frac{\pi}{\theta_n}\right]$$

$\boxed{\left[\frac{\pi}{\theta_n}\right] \leqq \frac{\pi}{\theta_n} < \left[\frac{\pi}{\theta_n}\right]+1}$ より

$$\frac{\pi}{\theta_n} - 1 < a_n = \left[\frac{\pi}{\theta_n}\right] \leqq \frac{\pi}{\theta_n}$$

$$\frac{\pi}{n\theta_n} - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} < \frac{a_n}{n} \leqq \frac{\pi}{n\theta_n}$$

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n\theta_n}$

$\sin\theta = \frac{1}{n+1}$ より

$n+1 = \frac{1}{\sin\theta}$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{\pi}{\left(\frac{1}{\sin\theta} - 1\right)\cdot\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{\pi}{\frac{\theta}{\sin\theta} - \theta}$$

$= \pi$ より

$$\pi \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leqq \pi$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \pi \quad //$$

過去問めぐり 2011 産医

$\boxed{1}$ (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt[3]{(n^3-n^2)^2} - 2n\cdot\sqrt[3]{n^3-n^2} + n^2\right\}$ ← ココを有理化

$t = f(n) = \sqrt[3]{n^3-n^2}$ とおく　　$t^3 = n^3 - n^2$

$$(与式) = \lim_{n\to\infty}\left(t^2 - 2nt + n^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}(t-n)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-n^2} - n\right)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{t^3-n^3}{t^2+tn+n^2}\right\}^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{-n^2}{\underbrace{\sqrt[3]{(n^3-n^2)^2}}_{2次} + \underbrace{n\sqrt[3]{n^3-n^2}}_{2次} + n^2}\right\}^2 \leftarrow \frac{\infty}{\infty}\left(\frac{2次}{2次}\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{1+1+1}\right)^2 = \frac{1}{9} \quad //$$