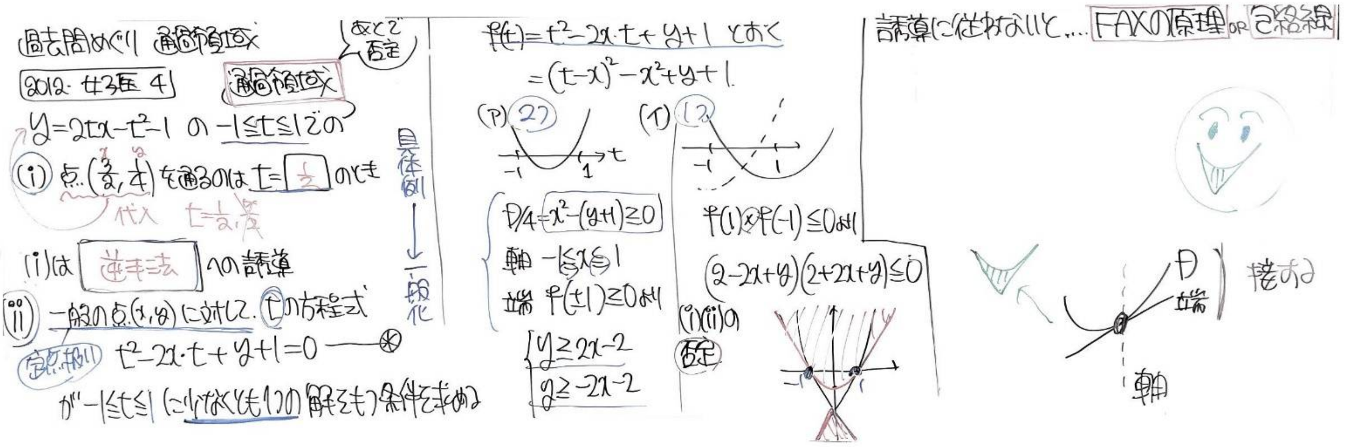
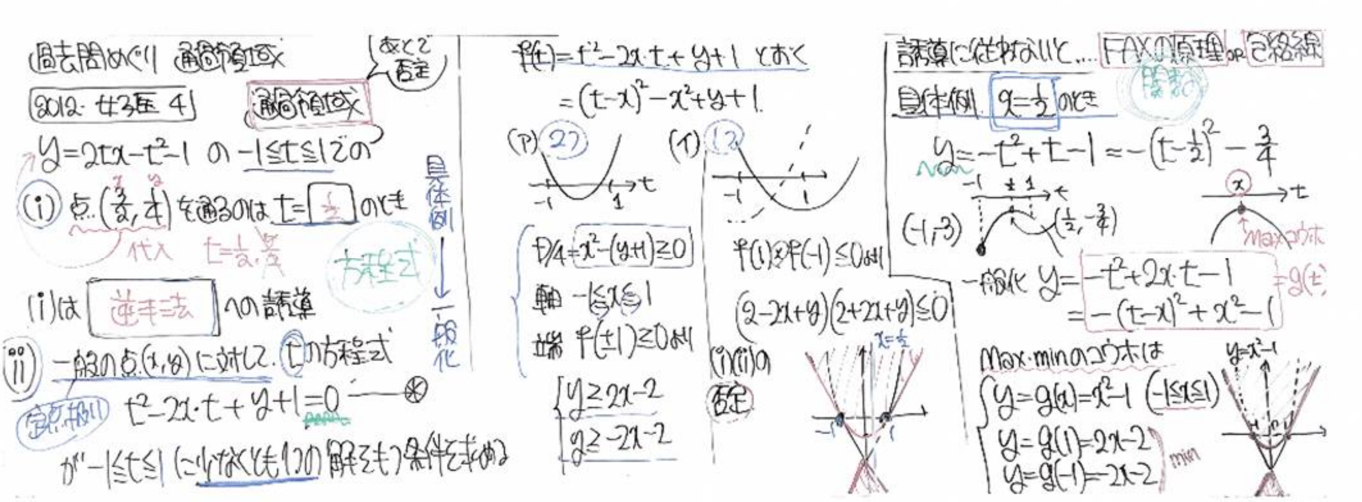
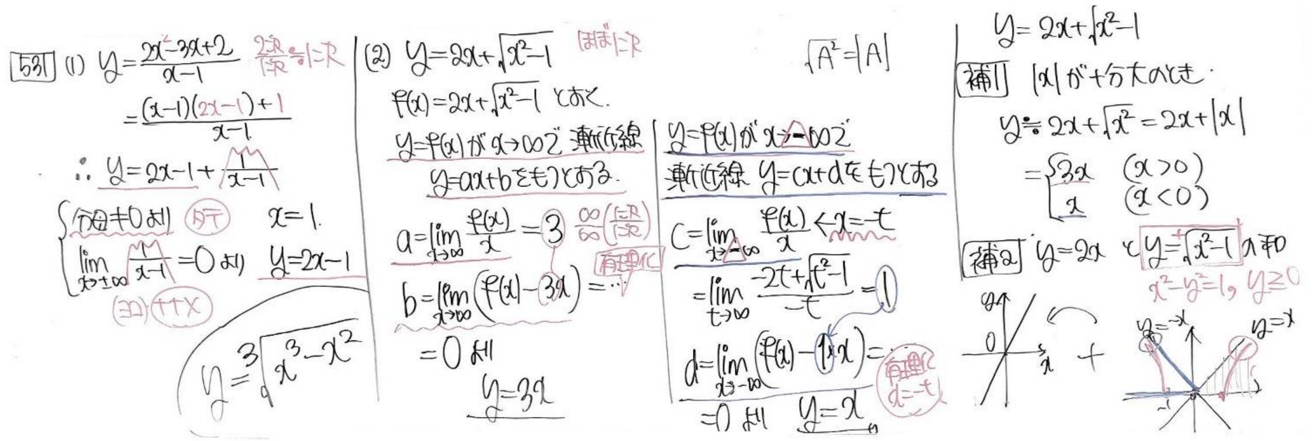
zemik2020-09-22（board）







$\boxed{\text{包絡線}}$（検算用）

(Ⅰ) tで整理してtで微分 ⇨ $\boxed{\text{接点}}$

$t^2-2x\cdot t+y+1=0$ より ——①

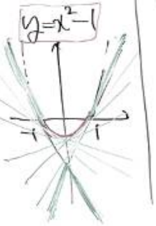
$2t-2x=0$ $\therefore x=t$ ——②

(Ⅱ)(Ⅰ)より t消去 ⇨ $\boxed{\text{包絡線}}$

②より $t=x$ を ①に代入

$y=x^2-1$ ——③

③の②での接線が $y=2tx-t^2-1$ ← 検



$\boxed{527}$ $\ell_t: y=-tx+e^t$（t: 全実数）

の通過領域を図示

ただし、$\lim_{x\to+0} x\cdot\log x=0$

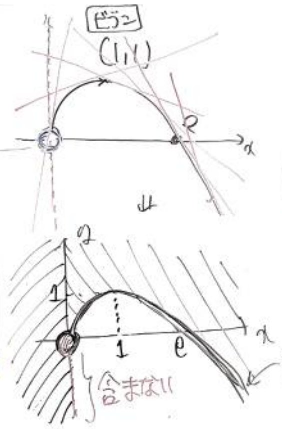
(Ⅰ) $x\cdot t-e^t+y=0$ より

$x-e^t=0$ $\therefore x=e^t$ ← 接点

(Ⅱ) $t=\log x$ を代入

$y=x-x\cdot\log x$ $(x>0)$

$\therefore y=x(1-\log x)$ 積のグラフ



$y=x(1-\log x)$ 含む

$y'=-\log x$

$\lim_{x\to+0} y'=+\infty$

$\log\infty=\infty$

$\log 0=-\infty$

$\boxed{\text{FAXの原理}}$ 関数として扱い（x固定）

$y=f(t)=-x\cdot t+e^t$ とおく。

$f'(t)=-x+e^t$ $x>0$に限る

$f'(t)=0$ となるのは $(t=\log x)$

(i) $x>0$ のとき $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\log x$

t	$\cdots$	$\log x$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	↑	↗

↑ $x-x\log x$

$\left[\lim_{t\to\infty} f(t)=\infty\right]$

$\lim_{t\to-\infty} f(t)=\infty$

(ii) $x<0$ のとき $f'(t)=0$ となるtは存在しない

$f'(t)>0$ より $f(t)$は単調増加

$\lim_{t\to\infty} f(t)=\infty$, $\lim_{t\to-\infty} f(t)=-\infty$

$\overset{\oplus}{-x}\times\overset{\infty}{t}+\overset{\infty}{e^t}$ $\quad$ $\overset{\oplus}{-x}\times\underset{-\infty}{t}+e^t\to0$

(iii) $x=0$ のとき 同様に単調増加

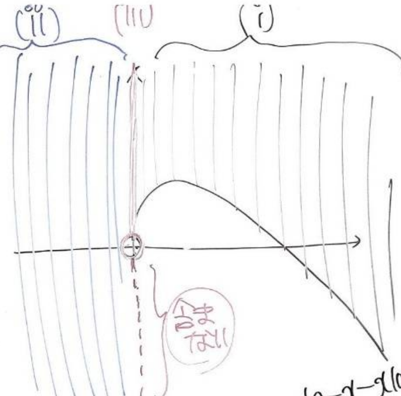
$\lim_{t\to\infty} f(t)=\infty$, $\lim_{t\to-\infty} f(t)=0$

$\quad \| \qquad\qquad \|$

$\quad e^t \qquad\quad e^t$

略

（あとは $y=x-x\log x$ を微分してグラフを描くこと。）

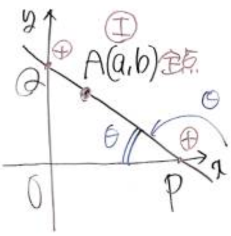


$y=x-x\log x$

$\boxed{528}$ テーマ．図形の最大最小問題

{ ① 文字設定 ② 変域 ⇨ ビラン など

(答) $-\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$



$a>0, b>0$

PQの長さが最小となるときの傾きを求める

$\boxed{\text{方針}}$ 傾きを文字でおく OR その他

傾きをmとおくと $(m<0)$ $\quad -m$ $\quad (m>0)$

相加相乗

微分

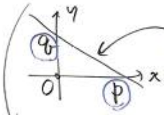
PQ: $y-b=m(x-a)$

$P\left(a-\frac{b}{m},0\right)$, $Q(0,-ma+b)$

$PQ^2=\left(a-\frac{b}{m}\right)^2+(-ma+b)^2$

$=a^2-\frac{2ab}{m}+\frac{b^2}{m^2}+a^2m^2-2ab\cdot m+b^2$

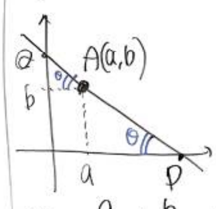
$=\left(a^2m^2+\frac{b^2}{m^2}\right)+2ab\left((-m)+\frac{1}{(-m)}\right)+a^2+b^2$

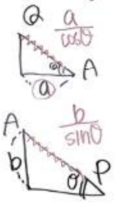


$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ とおく

$\frac{a}{p}+\frac{b}{q}=1$

$PQ^2=p^2+q^2=\cdots$





$PQ=\frac{a}{\cos\theta}+\frac{b}{\sin\theta}$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

図形の最大最小問題
① 文字設定
② 変域 ⇒ ビブン など

$f(\theta)=PQ^2=a\cdot(\cos\theta)^{-1}+b\cdot(\sin\theta)^{-1}$ とおく

$f'(\theta)=+\dfrac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}-b\times\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$

$=\dfrac{a\sin^3\theta-b\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

θ	0	…	α	…	$\frac{\pi}{2}$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

$f'(\theta)=0 \Leftrightarrow a\sin^3\theta=b\cos^3\theta$

$\Leftrightarrow \tan^3\theta=\dfrac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}=\dfrac{b}{a}$

これをみたすθをαとおく $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$

$\theta=\alpha$のときPQ最小
傾き $-\tan\alpha=-\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$

方針 傾きを文字でおく or その他

傾きをmとおくと ($m<0$)　($-m$)　($m>0$)

相加相乗
微分

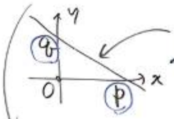
PQ: $y-b=m(x-a)$

$P(a-\frac{b}{m},0)$, $Q(0,-ma+b)$

$PQ^2=\left(a-\frac{b}{m}\right)^2+(-ma+b)^2$

$=a^2-\dfrac{2ab}{m}+\dfrac{b^2}{m^2}+a^2m^2-2ab\cdot m+b^2$

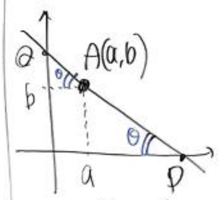
$=\left(a^2m^2+\dfrac{b^2}{m^2}\right)+2ab\left((-m)+\dfrac{1}{(-m)}\right)+a^2+b^2$



$\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}=1$ とお

$\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q}=1$

$PQ^2=p^2+q^2=\cdots$



$PQ=\dfrac{a}{\cos\theta}+\dfrac{b}{\sin\theta}\quad(0<\theta<\frac{\pi}{2})$

図形の最大最小問題
① 文字設定
② 変域 ⇒ ビブン など

$f(\theta)=PQ^2=a\cdot(\cos\theta)^{-1}+b\cdot(\sin\theta)^{-1}$ とおく

$f'(\theta)=+\dfrac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}-b\times\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$

$=\dfrac{a\sin^3\theta-b\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

θ	0	…	α	…	$\frac{\pi}{2}$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

$f'(\theta)=0 \Leftrightarrow a\sin^3\theta=b\cos^3\theta$

$\Leftrightarrow \tan^3\theta=\dfrac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}=\dfrac{b}{a}$

これをみたすθをαとおく $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$

$\theta=\alpha$のときPQ最小
傾き $-\tan\alpha=-\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$

チャレ(66) 計算問題

テーマ 文字設定

(1) $Q\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{1-a\cos\theta}{2\sin\theta}\right)$　y

(2) $y'=\cdots=\dfrac{a-\cos\theta}{2\sin^2\theta}$

$y'=0$ つまり $\cos\theta=a$ となるθをtとおく。

$\cos t=a$
$\sin t=\sqrt{1-a^2}$

θ	0	…	t	…	π
y'		$-$	0	$+$	
y		↘		↗	

最小値は
$\dfrac{1-a\cos t}{2\sin t}$
$=\dfrac{1-a^2}{2\sqrt{1-a^2}}=\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{2}$

67講
$f''(x)>0 \Rightarrow$ 下に凸
$f''(x)<0 \Rightarrow$ 上に凸

529 凹凸

530 1, -2, 0
　　a　b

ほぼ1次
$f(x)\fallingdotseq ax+b$

$y=f(x)$ が $x\to\infty$ で漸近線
$y=ax+b$ をもつとき

ヨコ・ナナメ

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ ← 傾き

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax\}=b$ ← y切片

531 (1) $y=\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}$　次数下げ

$=\dfrac{(x-1)(2x-1)+1}{x-1}$

$\therefore\ y=2x-1+\dfrac{1}{x-1}$

分母$\neq0$より タテ　$x=1$

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-1}=0$ より $y=2x-1$

(ヨコ) ナナメ

$y=\sqrt[3]{x^3-x^2}$

(2) $y=2x+\sqrt{x^2-1}$　ほぼ1次

$\sqrt{A^2}=|A|$

$f(x)=2x+\sqrt{x^2-1}$ とおく。

$y=f(x)$ が $x\to\infty$ で漸近線
$y=ax+b$ をもつとする。

$a=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=3$　$\frac{\infty}{\infty}$(1次/1次)

有理化

$b=\displaystyle\lim_{x\to\infty}(f(x)-3x)=\cdots$

$=0$ より
$y=3x$

$y=f(x)$ が $x\to-\infty$ で
漸近線 $y=cx+d$ をもつとする

$c=\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ ← $x=-t$

$=\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{-2t+\sqrt{t^2-1}}{-t}=1$

$d=\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(f(x)-1x)=\cdots$

有理化
$x=-t$

$=0$ より $y=x$

$y=2x+\sqrt{x^2-1}$

$\boxed{532}$

$\boxed{533}$

$\boxed{534}$ $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

分母≠0より $x=1$, $x=-1$

$\dfrac{3次}{2次}$ ÷ 1次より $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}=\dfrac{(x^2-1)\cdot x+x}{x^2-1}$

$=x+\dfrac{x}{x^2-1}$

$\boxed{分母=0 \Rightarrow 必ず漸近線とは限らない}$

例 $y=\dfrac{\sin x}{x}$

$\boxed{535}$ $y^2=x^2(4-x^2)$ ← 陰関数

$\Leftrightarrow y=\pm x\sqrt{4-x^2}$

$\boxed{536}$ 媒介変数の練

($\boxed{チャレ(67)}$ 軽く扱う.)

$\boxed{542}$

p.23〜p.24. ⟹ 各自 check

p.25〜

$\boxed{発-6-1}$ (1)(3)のみ.

(1) $\int\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}dx=\boxed{?}$

(3) $\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\sin x}\,dx=\boxed{?}$

$\boxed{発-6-6}$

$\boxed{発6-1}$ (1) $\int\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}dx$

$=\int\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$

$=\log|\sin x+\cos x|+C$

(Cは積分定数)

$t=\sin x+\cos x$ で置換してもいいよ.

$\int\dfrac{f'}{f}=\log|f|$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$\theta=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}$ とおくと $\dfrac{d\theta}{dx}=-\dfrac{1}{2}$.

(2) $\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\sin x}\,dx$ $\boxed{S^2+C^2=1}$

$=\int_0^{2\pi}\dfrac{|\cos x|}{\sqrt{1+\sin x}}dx$

← $0\leqq x\leqq 2\pi$ でゼロになり得る

$\sqrt{1-\cos\theta}$

⇓

半角

(与式) $=\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx$

$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}dx$

$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|dx$

(与) $=\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{3\pi}{4}}|\sin\theta|\times(-2)d\theta$

$=2\sqrt{2}\,\boxed{\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}|\sin\theta|d\theta=2}$

$=4\sqrt{2}$