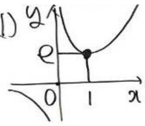
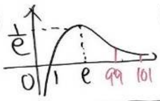
zemik2020-09-25（board）

538 (1)



(2) $k<0,\ k=e$

539 (1)



(2) $f(99)>f(101)$ より

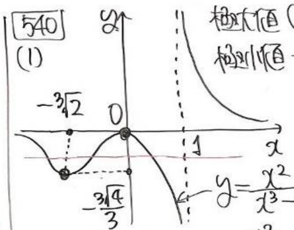
$99^{101}>101^{99}$

$\dfrac{\log 99}{99}>\dfrac{\log 101}{101}$

注 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ （$\frac{\infty}{\infty}$ 対数 <1次）

$y=\dfrac{1}{x^2}$

540 (1)



極大値 0

極小値 $-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$

$y=\dfrac{x^2}{x^3-1}$

(2) 定数分離 $k=\dfrac{x^2}{x^3-1}$

グラフより $-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}<k<0$

注 $kx^3-x^2-k=0$

《補足》先週の演習 [解1] $y=x^3-3ax^2+4$ のグラフ

[12] a：定数

$x^3-3ax^2+4=0$ の実数解の個数

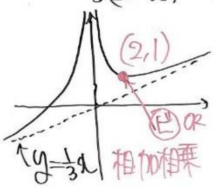
[解2] $x\neq 0$ より $\dfrac{x^3+4}{3x^2}=a$ ← 定数

$y=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{x^3+4}{x^2}$

$=\dfrac{1}{3}\left(x+\dfrac{4}{x^2}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{4}{x^2}\right)$

$\geq\dfrac{1}{3}\times 3\sqrt[3]{\dfrac{x}{2}\times\dfrac{x}{2}\times\dfrac{4}{x^2}}=1$

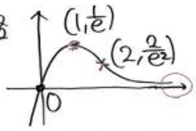
等号は $\dfrac{x}{2}=\dfrac{4}{x^2}$ より $x=2$



$(2,1)$　巳 OR 相加相乗　$y=\frac{1}{3}x$

a	……	1	…
個	1	2	3

541 (1) 略



$(1,\frac{1}{e})$, $(2,\frac{2}{e^2})$

$f(x)=xe^{-x}$

$f'(x)=(1-x)e^{-x}$

$f''(x)=(x-2)e^{-x}$

(2) $(t, f(t))$ での接線は $y-te^{-t}=(1-t)e^{-t}(x-t)$

$\therefore\ y=(1-t)e^{-t}x+t^2e^{-t}$

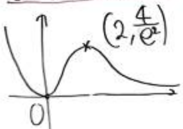
$(0,p)$ を通るから代入

$p=t^2e^{-t}$ ――※　接点

接線3本 ⟷ ※の解 t が3個

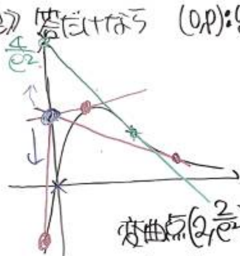
グラフより（微分など略）

$0<p<\dfrac{4}{e^2}$



$(2,\frac{4}{e^2})$

《補足》答だけなら　$(0,p)$：y軸上　検



$\frac{4}{e^2}$

変曲点 $(2,\frac{2}{e^2})$ での接線は

$y-\dfrac{2}{e^2}=-\dfrac{1}{e^2}(x-2)$

$y=-\dfrac{1}{e^2}x+\dfrac{4}{e^2}$

重接線　なし

接線本数の分け目

- 元の曲線
- 変曲点での接線
- 漸近線
- 重接線

類例 $(1,p)$ から引くと　3次

分け目 $p=\dfrac{3}{e^2},\ \dfrac{1}{e},\ 0$

543 (答)

a	……	0	…	$\frac{e^2}{4}$	……
本数	1	(0)	0	1	2

(t,e^t)　$(a<0)$　(s,as^2)

$a\neq 0$. ① $y=ax^2$, ② $y=e^x$ の共通接線の本数

[解1] 2接点を文字でおく

①の (s, as^2) での接線は

$y=2as(x-s)+as^2$

$y=2asx-as^2$ ③

②の (t, e^t) での接線は

$y-e^t=e^t(x-t)$

$y=e^tx+(1-t)e^t$ ④

③, ④が一致するから

$\begin{cases}2as=e^t & \leftarrow \text{傾き}\\ -as^2=(1-t)e^t & \leftarrow \text{切片}\end{cases}$

↓ s を消去

$-a\times\left(\dfrac{e^t}{2a}\right)^2=(1-t)e^t$

$e^{2t}-4a(t-1)e^t=0$ ――※

※をみたす解 t の個数に帰着

[解2] 1接点 & $D=0$

④を $y=ax^2$ と連立 & $D=0$

⋮

※

[※で $t=1$ は不適だから]

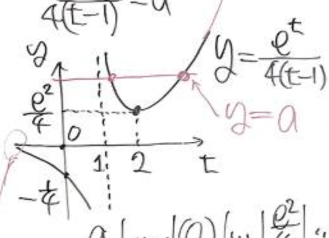
$\dfrac{e^t}{4(t-1)}=a$

∞　$\frac{\infty}{\infty}$（指数 >2次）

$y=\dfrac{e^t}{4(t-1)}$

$y=a$

$\frac{-0}{-\infty}=0$



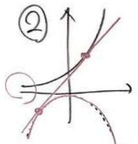
a	……	(0)	…	$\frac{e^2}{4}$	……
本数	1	(0)	0	1	2

$\boxed{543}$ 《補足》答だけでよければ

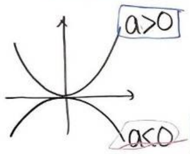
∞のオーダー
2次《指数

（接点が同じとは限らない）

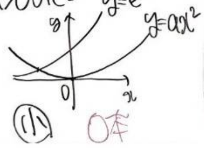
$a \neq 0$, ① $y=ax^2$, ② $y=e^x$ の $\boxed{\text{共通接線}}$ の本数



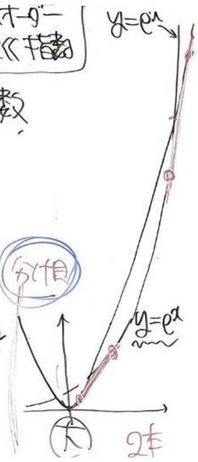
$a<0$なら1本
［$a=0$なら0本］

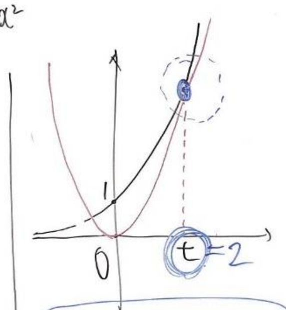


$a>0$のとき



分け目





分け目は
接点も同じ共通接線

$\begin{cases} at^2 = e^t \leftarrow y\text{座} \\ 2at = e^t \leftarrow \text{傾} \end{cases}$

$\frac{t}{2}=1$

$t=2 \quad \therefore a = \boxed{\frac{e^2}{4}}$

a	……	(0)	…	$\frac{e^2}{4}$	…
本数	1	(0)	0	1	2

LTC

微分の商の

$f(x) = \frac{4x-a}{x^2+1}$

$f'(x) = \frac{4(x^2+1)-(4x-a)\times 2x}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{-4x^2+2ax+4}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-ax-2=0$

$\Leftrightarrow \frac{4x-a}{x^2+1} = \frac{4}{2x}$

$x=\alpha$で極大値1をとる

傾 $\begin{cases} 2\alpha^2-a\alpha-2=0 \\ \text{かつ} \\ \frac{4\alpha-a}{\alpha^2+1} = 1 \text{ が必要} \end{cases}$ y

極大じゃないかもしれない

⋮ KKK など

$a=3$

$\frac{4x-3}{x^2+1}$

別解

傾 $\begin{cases} \boxed{\frac{4\alpha-a}{\alpha^2+1}} = \frac{4}{2\alpha} \\ \text{かつ} \\ \boxed{\frac{4\alpha-a}{\alpha^2+1}} = 1 \end{cases}$ y

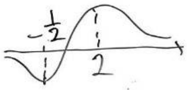
$\alpha=2$

$a=3$が必要

このとき

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-3x-2=0$

$\Leftrightarrow x=2, -\frac{1}{2}$



$-4 \leq f(x) \leq 1$ (2)

よって $a=3$

まとめ

関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ が $x=\alpha$ で極値をもつ

$\Rightarrow \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$

通称 安田の公式

証明 $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ が

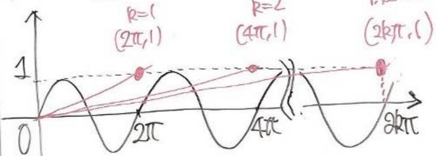
$x=\alpha$で0 $\Rightarrow \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$

$\boxed{544}$ k：正整数

$S(k)$：$x = 2k\pi \cdot \sin x \ (x \geq 0)$ の解の和

$\Updownarrow$

傾き $\frac{1}{2k\pi} x = \sin x$



$y=\sin x$

解を順に

a_1, b_1, a_2, b_2, …… , a_k, b_k として欲しい

$0\sim\pi$ $\quad 2\pi\sim 3\pi \quad (2k-2)\pi \sim (2k-1)\pi$

$\boxed{(2j-2)\pi \leq a_j < b_j < (2j-1)\pi}$ 評価

$4(j-1)\pi \leq a_j + b_j < 2(2j-1)\pi$

$\sum_{j=1}^{k} 4(j-1)\pi \leq S(k) < \sum_{j=1}^{k} 2(2j-1)\pi$

$4\pi \cdot \frac{k(k-1)}{2} \leq S(k) \leq 2\pi \cdot k^2$

「はさみうち」より $\lim_{k\to\infty} \frac{S(k)}{k^2} = 2\pi$