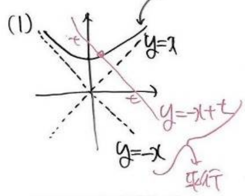
zemik2020-09-30（board）

560 学習テーマ
① $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ の積分 ⇒ 双パラ
② $y=\sqrt{x^2+1}$ の双パラの作り方

(1)



$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t}) \\ y=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t}) \end{cases}$

$\left(\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t}),\ \frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})\right)$

$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(e^{\theta}-e^{-\theta}) \\ y=\frac{1}{2}(e^{\theta}+e^{-\theta}) \end{cases}$

(検) $y^2-x^2=1$

$x=\tan\theta$, $y=\frac{1}{\cos\theta}$

(2) $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ ← ~~$x=\tan\theta$ でチカン~~

$x=\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})$ で置換

$y=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})$ ← $y=\sqrt{x^2+1}$ に $x=\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})$ 代入

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{t^2})$ より

$(\text{与式})=\int\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})\times\frac{1}{2}(1+\frac{1}{t^2})\,dt$

$=\frac{1}{4}\int\left(t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}+2\log t-\frac{1}{2t^2}\right)+C$

$y=\sqrt{x^2+1}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}(t-\frac{1}{t})^2+1}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}(t^2-2+\frac{1}{t^2})+1}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}(t^2+2+\frac{1}{t^2})}$

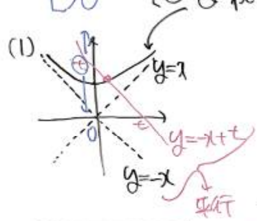
$=\sqrt{\frac{1}{4}(t+\frac{1}{t})^2}$

$=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})$

560 学習テーマ
① $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ の積分 ⇒ 双パラ
② $y=\sqrt{x^2+1}$ の双パラの作り方

$t>0$

(1)



$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t}) \\ y=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t}) \end{cases}$

$\left(\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t}),\ \frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})\right)$

$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(e^{\theta}-e^{-\theta}) \\ y=\frac{1}{2}(e^{\theta}+e^{-\theta}) \end{cases}$

(検) $y^2-x^2=1$

$x=\tan\theta$, $y=\frac{1}{\cos\theta}$

(2) $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ ← ~~$x=\tan\theta$ でチカン~~

$x=\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})$ で置換

$y=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})$ ← $y=\sqrt{x^2+1}$ に $x=\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})$ 代入

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{t^2})$ より

代入して t 消去

$(\text{与式})=\int\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})\times\frac{1}{2}(1+\frac{1}{t^2})\,dt$

$=\frac{1}{4}\int\left(t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}+2\log t-\frac{1}{2t^2}\right)+C$

ここで $x=\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})$ より

$t^2-2x\cdot t-1=0$

$t=x+\sqrt{1+x^2}>0$

$(\text{与式})=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\underbrace{(t+\frac{1}{t})}_{2y}\underbrace{(t-\frac{1}{t})}_{2x}+2\log t\right\}+C$

$=\frac{1}{2}\left\{x\cdot\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{1+x^2})\right\}+C$

《補足》$\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ を $t=x+\sqrt{1+x^2}$ で置換して求めよ　KO

← 正体は双パラ

チャレ(70) $\int\frac{2x+1}{x(x-1)^2}dx$　1次/3次

部分分数分解 BBB

① ~~$\frac{a}{x}+\frac{b}{(x-1)^2}$~~　1次以下/2次

② $\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{(x-1)^2}$　積分しにくい

$bx+c=b(x-1)+(c+b)$

③ $\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$　$\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=3 \end{cases}$

(答) $\log\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{3}{x-1}+C$

71講　C略

561 部分㊀　$(x-1)e^x$

$-x\cdot\cos x+\sin x$, $\frac{1}{2}x^2\cdot\log x-\frac{1}{4}x^2$

562 チカン ⟶ 部分㊀

(1) $\log x\cdot\log(\log x)-\log x$

(2) $2(\sqrt{x}-1)\cdot e^{\sqrt{x}}$

563 2回部分㊀　別解あり　積のビブン

(1) $-(x^2+2x+2)\cdot e^{-x}$

(2) $(2-x^2)\cdot\cos x+2x\cdot\sin x$

部分積分公式 $\int f'g=fg-\int fg'$　暗記

$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f(x)\cdot g'(x)\,dx$

(証) 積のビブン公式 より明らか.

564 学習テーマ $\int e^{▲}\sin■\,dx$, $\int e^{▲}\cos■\,dx$ の積

(2) $\begin{cases} \int e^x\sin x\,dx \\ \int e^x\cos x\,dx \end{cases}$　③ 積のビ 利用

方針 ① それぞれ部分積分2回 → ② $I=\int e^x\sin x\,dx$, $J=\int e^x\cos x\,dx$ とおき 部分㊀ 2回 ⇒ 連

(1) $(e^x\sin x)' = e^x\sin x + e^x\cos x$ ——①

$(e^x\cos x)' = e^x\cos x - e^x\sin x$ ——②

(2) ①−②： $\{e^x(\sin x+\cos x)\}' = 2\cdot e^x\sin x$

$\therefore \int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C_1$

①+②： $\{e^x(\sin x-\cos x)\}' = 2e^x\cos x$

$\therefore \int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C_2$

(C_1, C_2は積分定数)

ワ講　C略

561 部分㊥　$(x-1)e^x$

$-x\cdot\cos x+\sin x$，$\frac{1}{2}x^2\cdot\log x-\frac{1}{4}x^2$

562 チカン ⟶ 部分㊥

(1) $\log x\cdot\log(\log x)-\log x$

(2) $2(\sqrt{x}-1)\cdot e^{\sqrt{x}}$

563 2回部分㊥ ← 別解あり　積のビブン

(1) $-(x^2+2x+2)\cdot e^{-x}$

(2) $(2-x^2)\cdot\cos x+2x\cdot\sin x$

清史弘先生

部分積分公式 $\int f'g = fg - \int fg'$ ← 暗記

$\int f'(x)\cdot g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)dx$

証 積のビブン公式 より明らか.

564 学習テーマ $\int e^{\triangle}\sin\square\,dx$，$\int e^{\triangle}\cos\square\,dx$ の積分

(2) $\begin{cases}\int e^x\sin x\,dx\\ \int e^x\cdot\cos x\,dx\end{cases}$

③ 積のビ 利用　(1)は誘導

方針 ① ~~それぞれ~~ 部分積分2回 → ② $I=\int e^x\sin x\,dx$，$J=\int e^x\cos x\,dx$ とおき 部分㊥ 2回 ⇒ 連立

(1) $(e^x\sin x)' = e^x\sin x + e^x\cos x$ ——①

$(e^x\cos x)' = e^x\cos x - e^x\sin x$ ——②

(2) ①−②： $\{e^x(\sin x+\cos x)\}' = 2\cdot e^x\sin x$

$\therefore \int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C_1$

①+②： $\{e^x(\sin x-\cos x)\}' = 2e^x\cos x$

$\therefore \int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C_2$

(C_1, C_2は積分定数)

563 (2) 積のビ　Aim $\{\boxed{?}\}' = x^2e^{-x}$

$(x^2\cdot e^{-x})' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$ ——①

$(x\cdot e^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x}$ より

$(-e^{-x})'$

$\{(x+1)\cdot e^{-x}\}' = -x\cdot e^{-x}$ ——②

−①−2×② 　セキ

$[-\{x^2+2(x+1)\}\cdot e^{-x}]' = x^2\cdot e^{-x}$

$\therefore \int x^2\cdot e^{-x}dx = -(x^2+2x+2)\cdot e^{-x}+C$

565 積分で ▨乗の調節 ⇨ 部分積分

例外は．$\tan x$

$I_n = \int(\log x)^n dx$　$(n\geqq 0)$

(1) $\{I_n\}$の漸化式 ⇨ 部分積分

$I_n = \int 1\times(\log x)^n dx$

$= x(\log x)^n - \int x\times n(\log x)^{n-1}\times\frac{1}{x}dx$

$= x(\log x)^n - n\cdot I_{n-1}$ ■

(2) $I_1 = \int\log x\,dx = x\cdot\log x - x + C_1$

(1)より $I_2 = x(\log x)^2 - 2I_1 + C_2$

$= x\cdot(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C_2$

$I_3 = x\cdot(\log x)^3 - 3x\cdot(\log x)^2 + 6x\cdot\log x - 6x + C_3$

(C_1, C_2, C_3は積分定数)

$\int f'g = fg - \int fg'$

$g(x) = x^{◎}$，$(\log x)^{\triangle}$ のとき有効

体系は子 4STEP

566 背景 微分方程式(範囲外)

杏林 2019[3]

関数方程式 (解は関数)

① 積分方程式

区間定数 ⇒ 文字でおく　267 A

〃 変数 ⇒ 代入&ビブン　269 B

Coming Soon

② 整式型 ⇒ 次数を決めて係数比較

③ $f(x+y)$型 ⇒ 数値代入 & 微分の定義 568

④ 微分方程式 (多分．誘導が入く)

例 $f'(x) = f(x)$　$f(x) = \boxed{?}$

解 $f(x) = D\cdot e^x$ (D:実数)

変数分離法 (説明はインチキ)

$y = f(x)$とおくと

(与式) $\frac{dy}{dx} = y$

$\int\frac{1}{y}dy = \int dx$

$\log|y| = x + C$

$|y| = e^{x+C}$

$y = \pm e^C\cdot e^x$　($\pm e^C = D$)

$y = De^x$

D:全実数

問 $f'(x) - 2f(x) = x+1$.

《考察》 $y = f(x)$とおくと

$\frac{dy}{dx} - 2y = x+1$

⇨ 変数分離法では解けない

※: $f'(x) - 2f(x) = x+1$ ← 解けない微分方程式

(1) $g(x) = e^{-2x}f(x)$ より

$g'(x) = -2e^{-2x}f(x) + e^{-2x}\cdot f'(x)$

$= e^{-2x}(f'(x) - 2f(x))$ ※

$= (x+1)\cdot e^{-2x}$

部分㊥

(2) $g(x) = \int g'(x)dx$

$= \int(x+1)e^{-2x}dx = (x+1)\cdot\frac{e^{-2x}}{-2} - \int 1\times\frac{e^{-2x}}{-2}dx$

$= -\frac{1}{2}(x+1)\cdot e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$

$= -\frac{1}{4}(2x+3)\cdot e^{-2x} + C$　(C:定数)

(3) $g(0) = e^0\cdot f(0) = 0$ より $C = \frac{3}{4}$

$g(x) = -\frac{1}{4}(2x+3)\cdot e^{-2x} + \frac{3}{4}$

よって $f(x) = e^{2x}\cdot g(x)$

$= \frac{3}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}(2x+3)$

567 後述

【質問対応】

$$\int \frac{\log(\log x)}{x}\,dx \qquad \boxed{t=\log x} \quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x} \quad \frac{1}{x}dx=dt$$

$$=\int \log t \cdot dt$$

$$=t\cdot\log t - t + C$$

$$=\log x \times \log(\log x) - \log x + C$$