

5/13 . 国立.

- 大鳥の筆
- FAL(5) ジャンダマ

6/24

39 C

実数 x, y が $x^2 + 2y^2 = 1$ を満たしながら変化するとき, $\frac{1}{2}x + y^2$ の最大値, 最小値を求めよ. さらに, そのときの x, y の値を求めよ.

40 C

放物線 $y = -x^2 + 6x$ と x 軸で囲まれる部分に内接する長方形 (一边は x 軸上にある) のうちで, 周の長さが最大になる長方形の 2 辺の長さを求めよ.

入試問題にチャレンジ (5)

~~全問正解~~

k は実数の定数とする. 関数 $f(x) = x^2 - 4|x| + k$ の最小値を $m(k)$, 最大値を $M(k)$ とする.

(1) $m(k) = 2$ のとき, k の値を求めよ.

(2) $-1 \leq x \leq 5$ のとき, $m(k), M(k)$ をそれぞれ, k を用いて表せ.

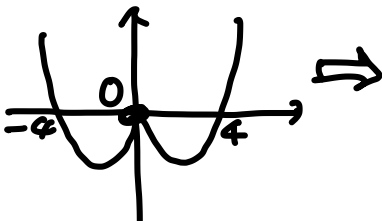
(3) 関数 $y = f(x)$ のグラフを直線 $y = k$ に関して対称移動するとき, その最大値を求めよ.

(2000・滋賀医科大学)

hint

$$y = x^2 - 4|x|$$

$$y = x^2 - 4|x| + k$$



第6講

2次関数(2) → { 方程式
不等式 }

まあ

a, b, c は実数, $a \neq 0$ とする.

1 2次関数のグラフと2次方程式の解

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解は連立方程式

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$$

の実数解 x の値, すなわち, 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸 ($y = 0$) との共有点の x 座標と一致する.

2 2次関数のグラフと2次不等式の解

2次不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$ の解は, 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ 上の点で, (y 座標) ≥ 0 となる x の値の範囲である.

2次不等式 $ax^2 + bx + c \leq 0$ の解は, 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ 上の点で, (y 座標) ≤ 0 となる x の値の範囲である.

2 解の配置

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解がある区間内に存在するかどうか, 存在するならばいくつ存在するかを判断するには, 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを利用する.

そのとき,

(i) 判別式 $D = b^2 - 4ac$ の符号, または, 頂点の y 座標の符号

(ii) 軸 $x = -\frac{b}{2a}$ の位置

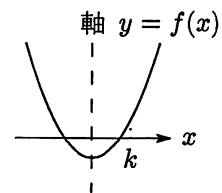
(iii) 区間の端点における関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ の値の符号

のいずれかに注目する.

例えば, 次のようになる.

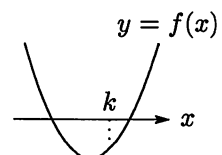
(1) 2つの解 (重解の場合も含む) がともに k より小

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x = -\frac{b}{2a} < k \\ f(k) > 0 \end{cases}$$

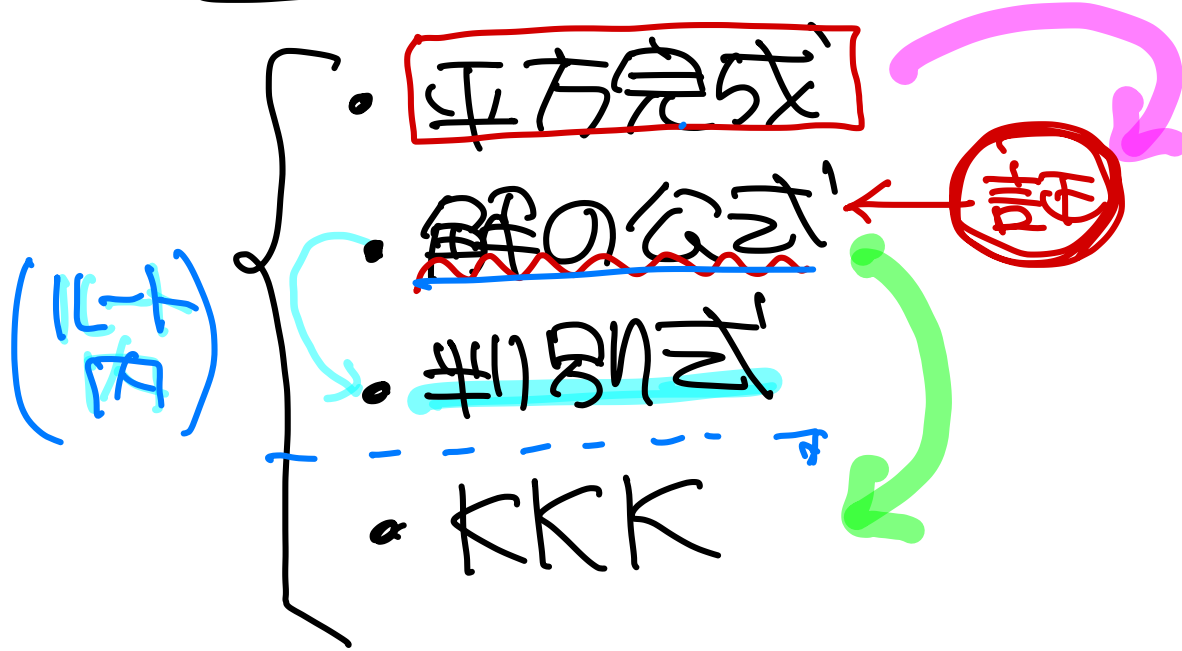


(2) 1つの解は k より大, 1つの解は k より小

$$f(k) < 0$$



2次特有の道具



2次方程式 (a≠0) : a, b, c 全部

$$ax^2 + bx + c = 0$$

2が所々のxを
1つにまとめる

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

解 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

平方完成

順大

41 A

$$f(x) = |x^2 - 2x - 3| \text{ とする.}$$

(1) $y = f(x)$ のグラフをかけ.

(2) 方程式 $f(x) = k$ が相異なる 4 個の実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ.

42 A

2 次不等式 $ax^2 + bx + 2 < 0$ の解が $x < -1$, $2 < x$ であるような定数 a , b の値を求めよ.

43 A

すべての実数 x に対して $2x^2 - kx + 3 > 0$ が成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ.

43

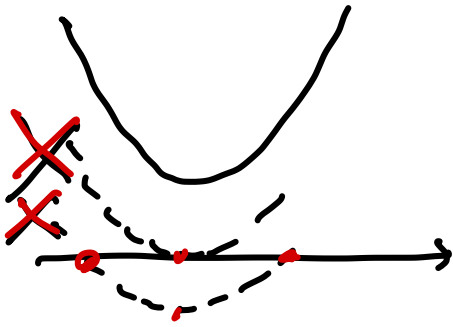
不等式 $\Rightarrow$ ぶん

すべての実数 x に対して $2x^2 - kx + 3 > 0$ が成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ。



x 軸

$y = 2x^2 - kx + 3$ が $y = 0$ より常に上側



[解1] $2x^2 - kx + 3 = 0$ の

判別式 $D < 0$

$$k^2 - 24 < 0$$

$$-2\sqrt{6} < k < 2\sqrt{6}$$

[解2] $y = 2x^2 - kx + 3 = 2\left(x - \frac{k}{4}\right)^2 + 3 - \frac{k^2}{8}$

の頂点の y 座標 $3 - \frac{k^2}{8} > 0$ より

平方完成

$$-2\sqrt{6} < k < 2\sqrt{6}$$

44 B

次の問に答えよ.

- (1) $0 \leq x \leq 2$ を満たすすべての x に対して, $x^2 - 2ax + a + 6 > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ.
- (2) $0 \leq x \leq 2$ を満たすある x に対して, $x^2 - 2ax - 8 > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ.

45 B

方程式 $|4 - x^2| + 2x + k = 0$ の異なる実数解の個数が 4 であるような定数 k の値の範囲を求めよ.

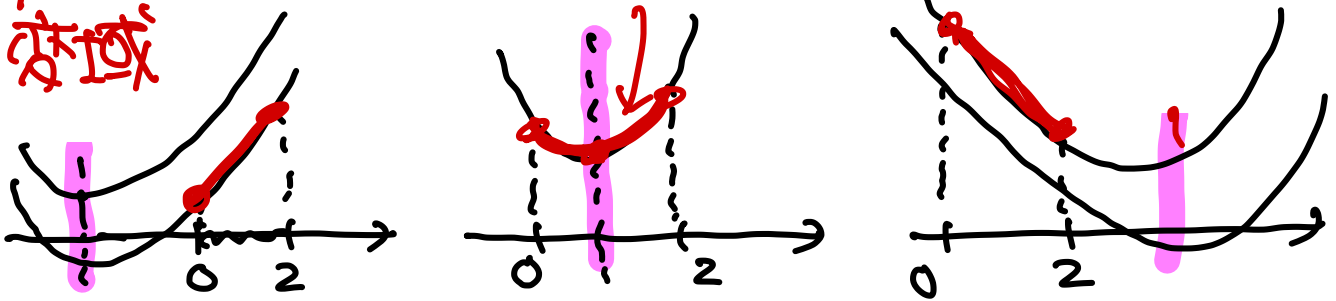
46 B

x の方程式 $x^2 - 2(k+1)x + 2k + 5 = 0$ が次のような実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ.

- (1) 2 つの解がともに 2 より大きい.
- (2) 1 つの解が 2 より大きく, もう 1 つの解が 2 より小さい.

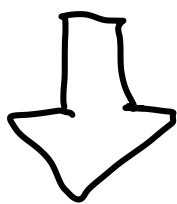
44 不等式 $\Rightarrow$ 2つの上下

(1) $0 \leq x \leq 2$ を満たすすべての x に対して、 $x^2 - 2ax + a + 6 > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。



$f(x) = x^2 - 2ax + a + 6$ とおき $0 \leq x \leq 2$ での
(最小値) > 0 となるような a の条件を求め

[軸2場合分け 左外, 内, 右外]



候補を絞る2つで整理

$$f(x) = x^2 - 2ax + a + 6 = (x - a)^2 - a^2 + a + 6$$

最小値の候補は

$$\begin{cases} y = f(a) = -a^2 + a + 6 & (0 \leq a \leq 2 \text{ のみ}) \\ y = f(0) = a + 6 \\ y = f(2) = -3a + 10 \end{cases}$$

 $a < -1$

成立・不成立の区別

そのまま解く

OR

否定

あべこべ

『鏡の国のプリンス』

あま = あまの

$$\overline{a^2} = a$$
$$y = x^2 - 2ax - 8$$

前提

$0 \leq x \leq 2$ であるとき $x^2 - 2ax - 8 > 0$

不

金

$0 \leq x \leq 22$ 全ての x に対して $x^2 - 2ax - 8 \leq 0$

99105

①の条件

1. - ~~(E)~~



(答)

45

全数分離法

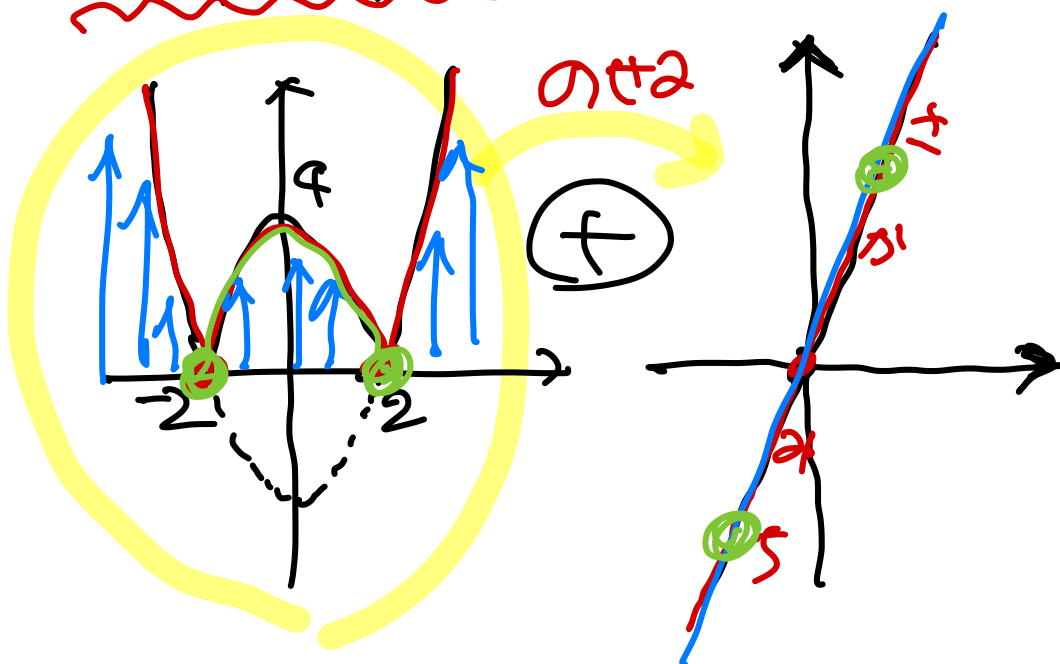
方程式 $|4-x^2|+2x+k=0$ の異なる実数解の個数が4であるような定数 k の値の範囲を求めよ。

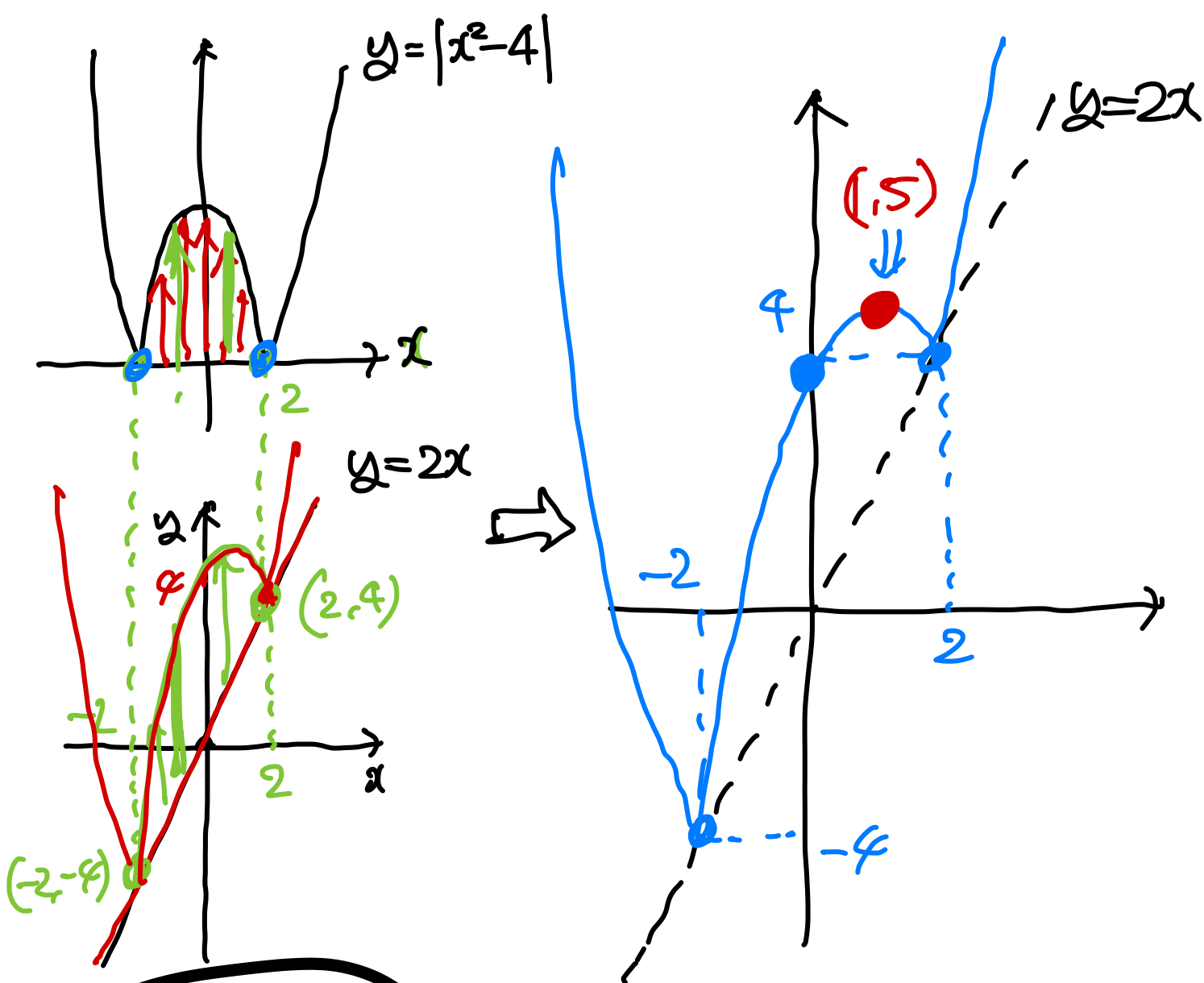
$$\left[-|4-x^2|-2x=k \right] \quad +|4-x^2|+2x=-k$$

$y=|4-x^2|+2x$ と $y=-k$ の共有点が4個

$\Rightarrow y=|x^2-4|+2x$ 場合分け2通り

$y=|x^2-4|$ と $y=2x$ の和





$$y = |x^2 - 4| + 2x$$

$$= \begin{cases} + () + 2x \\ - () + 2x \end{cases}$$

$$\rightarrow y = -(x^2 - 4) + 2x$$

$$= -(x - 1)^2 + 5$$

頂点 (1, 5)

$|x^2 - 4| + 2x = -k$ の解は.

$\triangle -k$	...	-4	...	4	...	5	...
1個	0	1	2	3	4	3	2

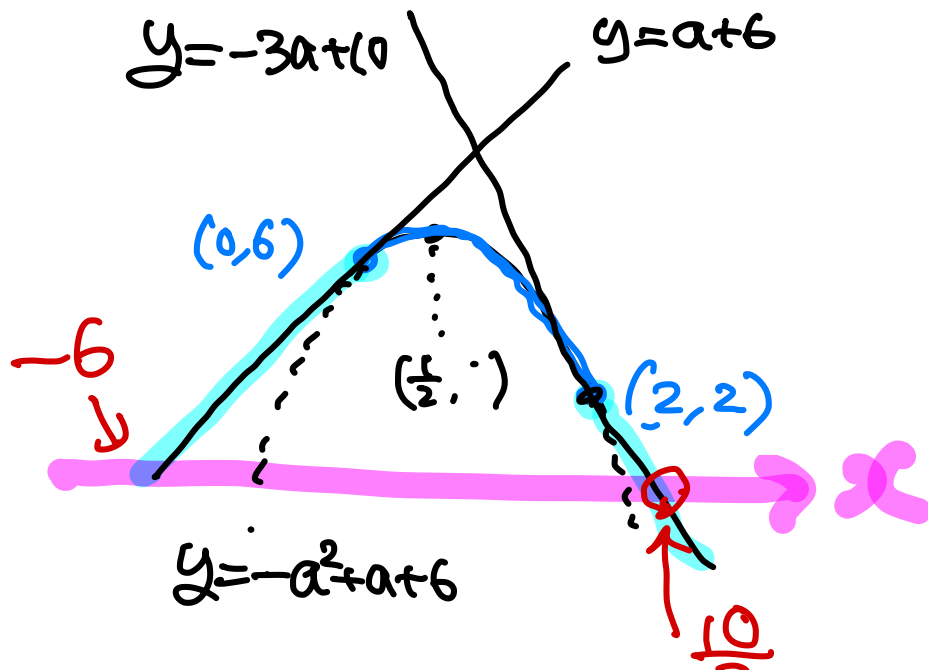
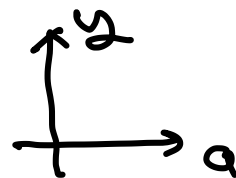
4解もとの $-5 < k < -4$

最小値の候補は

$$y = f(a) = -a^2 + a + 6 \quad (0 \leq a \leq 2) \text{ のみ.}$$

$$y = f(0) = a + 6$$

$$y = f(2) = -4a + 10$$



最小値 > 0 あり

$$-6 < a < \frac{10}{3}$$

(1) $0 \leq x \leq 2$ を満たすすべての x に対して、 $x^2 - 2ax + a + 6 > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

1次 (2次関数)

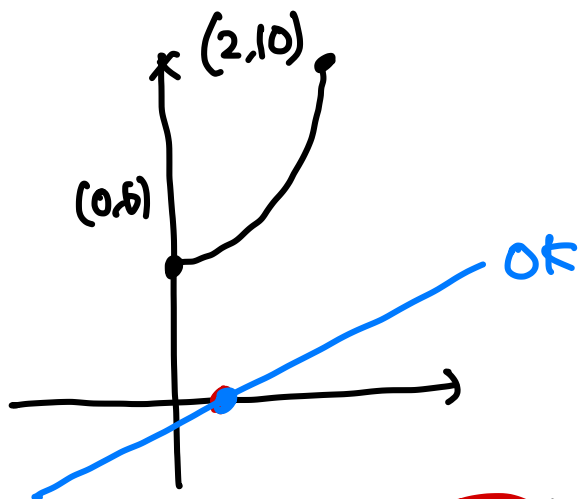
[別1]

$$x^2 + 6 > 2a(x - \frac{1}{2})$$

$$y = x^2 + 6 \text{ の } 0 \leq x \leq 2 \text{ の}$$

$$y = 2a(x - \frac{1}{2}) \text{ より上..}$$

傾き $2a$
 全点 $(\frac{1}{2}, 0)$



[別2]

$$x^2 + 6 > a(2x - 1)$$

$$\iff$$

$$\frac{x^2 + 6}{2x - 1} > a$$

46

共有5

x の方程式 $x^2 - 2(k+1)x + 2k+5 = 0$ が次のような実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

$$2 \leq k < \frac{5}{2}$$

(1) 2つの解がともに2より大きい。

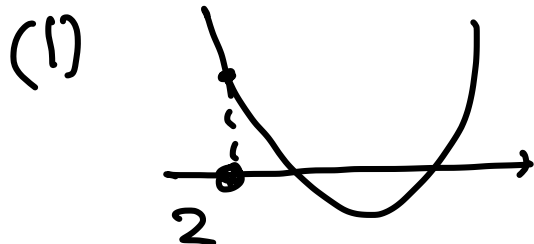
(2) 1つの解が2より大きく、もう1つの解が2より小さい。

$$\rightarrow k > \frac{5}{2}$$

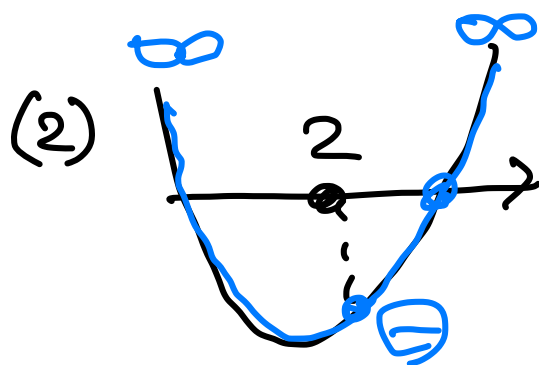
2次方程式の解の配置

判別式, 軸, 端点

$$f(x) = x^2 - 2(k+1)x + 2k+5 \quad \text{と置く。}$$



$$\begin{cases} D \geq 0 \\ \text{軸 } x = k+1 > 2 \\ \text{左端 } f(2) > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} D > 0 \\ \text{軸} \\ \text{端 } f(2) < 0 \end{cases}$$

5/1

< 2 位置

定数分離

$$x^2 - 2x + 5 = 2k(x-1)$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5}{x-1} = 2k$$

KKK (2:2)

x の 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の 2 解が α, β



$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

一般化

単に「2解」



重解を含む

まとめ

合理的

47 C

関数 $f(x) = -x^2 + kx + k - 2$, $g(x) = x^2 - (k - 2)x + 3$ について, 次の条件を満たすような定数 k の値の範囲をそれぞれ求めよ.

- (1) どのような実数 x に対しても $f(x) < g(x)$ が成り立つ.
- (2) どのような実数 x_1, x_2 に対しても $f(x_1) < g(x_2)$ が成り立つ.

48 C

x についての2次方程式 $x^2 - 2kx + 2k^2 - 2 = 0$ が $x > 0$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ.

入試問題にチャレンジ (6)

任意の実数 x, y に対して, 不等式 $a(x^2 + y^2) - (a + 3)xy \geq 0$ が成り立つような定数 a の最小値を求めよ.

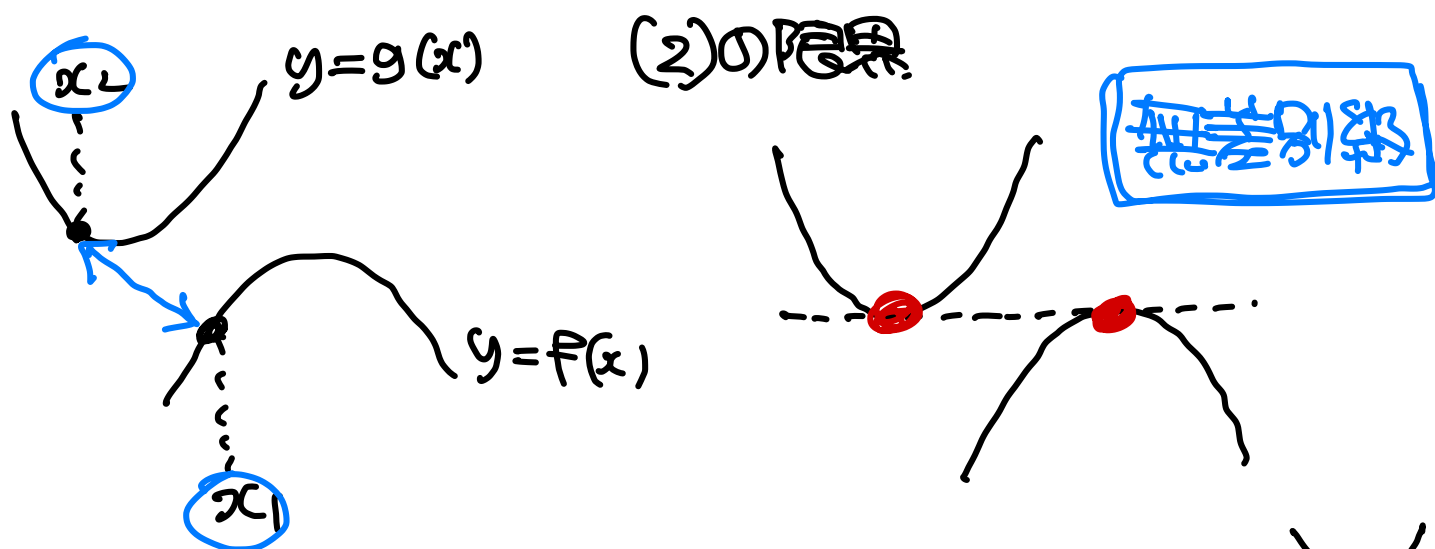
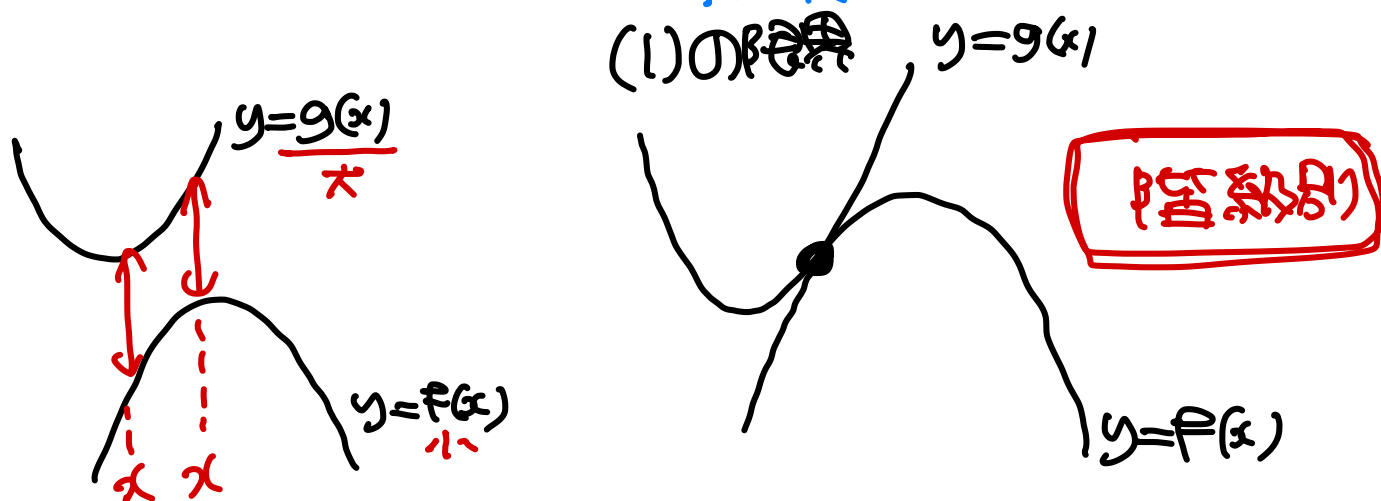
(1999・自治医科大学)

47 柔道 階級別 無差別級

関数 $f(x) = -x^2 + kx + k - 2$, $g(x) = x^2 - (k-2)x + 3$ について、次の条件を満たすような定数 k の値の範囲をそれぞれ求めよ。

(1) どのような実数 x に対しても $f(x) < g(x)$ が成り立つ。

(2) どのような実数 x_1, x_2 に対しても $f(x_1) < g(x_2)$ が成り立つ。



(1) $\Rightarrow$ 恒成立 $g(x) - f(x) > 0$

(2) $\Rightarrow$ $(g(x) \text{ の最小値 }) > (f(x) \text{ の最大値 })$
(大) の min (小) の Max

(1) 答 $-3 < k < 3$ (2) $-2\sqrt{2} < k < 2\sqrt{2}$

48C

2次式

~~k < 0
全範囲で正~~

x についての2次方程式 $x^2 - 2kx + 2k^2 - 2 = 0$ が $x > 0$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

1個, 2個

答 $-1 < k \leq \sqrt{2}$

第21講

式と証明(1)

1 整式の除法

2つの整式 $f(x)$, $g(x)$ (ただし, $g(x) \neq 0$) に対して,

$$f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$$

$$(R(x) \text{ の次数}) < (g(x) \text{ の次数}) \text{ または } R(x) = 0$$

を満たす整式 $Q(x)$, $R(x)$ がただ1組存在する.

$Q(x)$ を, $f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの商, $R(x)$ を余りという.

特に, $R(x) = 0$ のとき, $f(x)$ は $g(x)$ で割り切れるという.

2 分数式

A が整式で, B が定数でない整式のとき, $\frac{A}{B}$ の形の式を分数式という.

3 分数式の四則計算

$$\begin{array}{ll} \text{加法} & \frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C} \quad \text{減法} \quad \frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C} \\ \text{乗法} & \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD} \quad \text{除法} \quad \frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC} \end{array}$$

4 恒等式

x がどのような値をとっても, その両辺の式の値が存在する限り, 両辺の値が等しいとき, その等式を x についての恒等式という.

5 等式 $A = B$ の証明

等式 $A = B$ を証明するとき, 次のような方法がよく用いられる.

(i) A または B の一方を変形して, 他方を導く.

(ii) A , B のそれぞれ変形して, 同じ式を導く.

(iii) $A - B = 0$ を示す.

6 不等式 $A \geq B$ の証明

$A - B$ が0以上の数の和や積で書けることを利用する方法や, $A - B$ をある文字の関数とみなして値域を調べたりする方法がある.

7 有名な不等式

(1) 相加平均と相乗平均の大小関係

$$a \geq 0, b \geq 0 \text{ のとき, } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ が成り立つ.}$$

(等号が成り立つのは $a = b$ のとき)

(2) コーシー・シュワルツの不等式

$$a, b, x, y \text{ が実数のとき, } (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2 \text{ が成り立つ.}$$

(等号が成り立つのは $a : b = x : y$ のとき)

161 A

次の問に答えよ.

- (1) $x^2 - 3x - 4$ を $x + 2$ で割った商と余りを求めよ.
- (2) $x^2 + x + 1$ で割ると、商が $x - 1$ 、余りが $2x + 3$ である多項式を求めよ.
- (3) $x^3 - x^2 + 3x + 1$ を多項式 $f(x)$ で割ると、商が $x + 1$ 、余りが $3x - 1$ であるとき、 $f(x)$ を求めよ.

162 A

次の計算をせよ.

- (1) $\frac{3x - 4}{x^2 - 3x + 2} - \frac{3x + 2}{x^2 - 4}$
- (2) $\frac{x + 1}{x} - \frac{x + 2}{x + 1} - \frac{x - 4}{x - 3} + \frac{x - 5}{x - 4}$
- (3) $\frac{x}{1 - \frac{x}{1 - \frac{1}{1 + x}}}$

163 A

次の等式が x についての恒等式となるような定数 a , b , c の値を求めよ.

- (1) $x^3 + x^2 - 8x + 5 = (x - 2)^3 + a(x - 2)^2 + b(x - 2) + c$
- (2) $\frac{3}{x^3 + 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1}$

164 B

$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき、次の式の値を求めよ.

(1) $x^2 + x - 1$

(2) $4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$

165 B

(1) $a + b + c = 0$, $abc \neq 0$ のとき、等式

$$a \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + b \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) + c \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = -3$$

が成り立つことを示せ.

(2) a, b, c が実数のとき、不等式

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

が成り立つことを示せ.

(3) a, b, x, y が実数のとき、不等式

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

が成り立つことを示せ.

166 B

$x > 0$ のとき、 $\left(x + \frac{4}{x}\right) \left(x + \frac{9}{x}\right)$ の最小値を求めよ.

167 C

a, b は正の整数とする. $\sqrt{3}$ は $\frac{a}{b}$ と $\frac{a+3b}{a+b}$ の間にあることを示せ.

168 C

$|x| < 1, |y| < 1, |z| < 1$ のとき, 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

(1) $xy + 1 > x + y$

(2) $xyz + 2 > x + y + z$

入試問題にチャレンジ (21)

実数 x, y, z について $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$ を示し, 等号がいつ成り立つかを答えよ. これを用いて, 命題

$$「x^2 + y^2 + z^2 \leq a \text{ ならば } x + y + z \leq a \text{ である}」$$

が真となる最小の正の実数 a を求めよ.

(2005・岡山大学)

第22講

式と証明(2)

1 負の数の平方根

2乗すると -1 になる数の1つを虚数単位といい、 i で表す。すなわち、

$$i^2 = -1$$

さらに、

$$a > 0 \text{ のとき, } \sqrt{-a} = \sqrt{a}i \quad \text{特に, } \sqrt{-1} = i$$

2 複素数

a, b を実数とするとき、 $a + bi$ の形の数を複素数といい、 a を実部、 b を虚部という。

3 複素数の相等

a, b, c, d は実数とする。複素数 $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ に対して、

$$\alpha = \beta \iff a = c, \quad b = d$$

4 共役な複素数

a, b は実数とする。複素数 $\alpha = a + bi$ に対して、 $a - bi$ を α と共役な複素数といい、 $\bar{\alpha}$ と書く。

5 実数係数の方程式の虚数解

実数を係数とする n 次方程式が虚数解 α をもつとき、共役複素数 $\bar{\alpha}$ もその方程式の解である。

6 2次方程式の解と係数の関係

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解を α, β とすると、

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

169 A

i を虚数単位とすると、次の計算をせよ.

(1) $(4 + 5i) - (3 - 2i)$

(2) $(2 + i)(1 - i)$

(3) $\frac{2 + 5i}{1 - 3i}$

170 A

i を虚数単位とすると、次の等式を満たす実数 x, y を求めよ.

(1) $(2i + 3)x + (2 - 3i)y = 5 - i$

(2) $\frac{x + 2i}{1 + 3i} = 1 + yi$

171 A

2 次方程式 $2x^2 - 4x + 5 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき、次の式の値を求めよ.

(1) $\alpha^2 + \beta^2$

(2) $(\alpha - \beta)^2$

(3) $\alpha^3 + \beta^3$

172 B

i を虚数単位とすると、等式 $z^2 = 8 - 6i$ を満たす複素数 z をすべて求めよ.

173 B

x の方程式 $x^2 + (m - 3)x + m^2 - 6m - 3 = 0$ が実数解 α, β をもつとき、 $\alpha^2 + \beta^2$ のとり得る値の範囲を求めよ.

174 B

2 次方程式 $x^2 - 5x + 5 = 0$ の 2 つの解の小数部分を解とするような 2 次方程式のうち、 x^2 の係数が 1 であるものを求めよ.

175 C

m は整数とする. x についての 2 次方程式 $x^2 - mx + 3m = 0$ が整数解をもつような m の値を求めよ. さらに, そのときの整数の解をすべて求めよ.

176 C

k は実数の定数とする. x についての 2 次方程式 $x^2 + kx + k^2 + 3k - 9 = 0$ が実数解をもつとき, その解の値の範囲を求めよ.

入試問題にチャレンジ (22)

0 以上の実数 s, t が $s^2 + t^2 = 1$ を満たしながら動くとき, 方程式

$$x^4 - 2(s+t)x^2 + (s-t)^2 = 0$$

の解のとり値の範囲を求めよ.

(2005・東京大学)

第23講

式と証明(3)

[1] 剰余の定理

整式 $P(x)$ について,

$$(P(x) \text{ を } x - \alpha \text{ で割ったときの余り}) = P(\alpha)$$

[2] 因数定理

整式 $P(x)$ について,

$$「P(x) \text{ が } x - \alpha \text{ で割り切れる}」 \iff P(\alpha) = 0$$

[3] 3 次方程式の解と係数の関係

3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とすると,

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

[4] 1 の 3 乗根 ω

3 次方程式 $x^3 = 1$ の解を 1 の 3 乗根という.

さらに, $x^3 = 1$ の虚数解 $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ の一方を ω と表すことが多い. このとき, 次が成り立つ.

$$(i) \quad \omega^3 = 1 \quad (ii) \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0 \quad (iii) \quad \omega^2 = \bar{\omega}$$

[5] 特殊な 4 次方程式

(1) 複 2 次方程式

$x^4 + ax^2 + b = 0$ の形の方程式を複 2 次方程式という.

(2) 相反方程式

$a \neq 0$ とするとき, $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ の形の方程式を相反方程式という.

177 A

多項式 $x^3 + 3x^2 + ax + 5$ を $x + 1$ で割ったときの余りが 3 となるような定数 a の値を求めよ.

178 A

次の方程式を解け.

(1) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

(2) $2x^3 - 7x^2 + 2 = 0$

(3) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 8 \cdot 7 \cdot 6$

179 A

3 次方程式 $2x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$ の 3 つの解を α , β , γ とするとき, 次の式の値を求めよ.

(1) $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$

(2) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

(3) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

180 B

多項式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると余りが 2, $x-2$ で割ると余りが 3 である. このとき, $f(x)$ を $x^2 - 3x + 2$ で割ったときの余りを求めよ.

181 B

実数を係数とする 3 次方程式 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ が $3 + 2i$ を解にもつとする. ただし, i は虚数単位とする.

- (1) 係数 a , b の値を求めよ. さらに, 他の 2 つの解を求めよ.
- (2) 3 つの解を α , β , γ とするとき, $\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5$ の値を求めよ.

182 B

方程式

$$2x^4 - 9x^3 - x^2 - 9x + 2 = 0 \quad \dots (*)$$

について, 次の問に答えよ.

- (1) $t = x + \frac{1}{x}$ とおいて, $(*)$ を t の方程式で表せ.
- (2) $(*)$ を解け.

183 C

多項式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると余りが 5, $(x+2)^2$ で割ると余りが $-23x-35$ である.
このとき, $f(x)$ を $(x-1)(x+2)^2$ で割ったときの余りを求めよ.

184 C

1 の 3 乗根のうち, 虚数であるものの 1 つを ω とするとき,

$$\omega^{2n} + \omega^n + 1$$

の値を求めよ. ただし, n は自然数とする.

入試問題にチャレンジ (23)

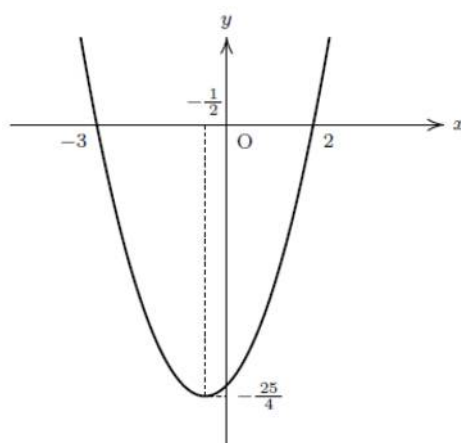
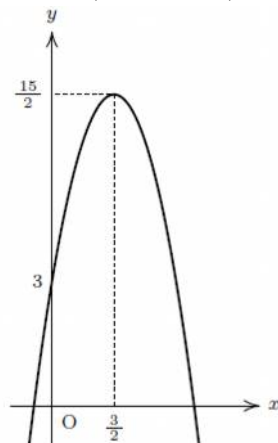
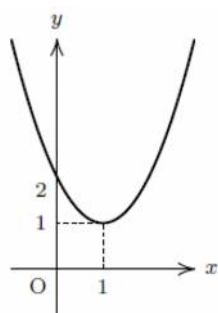
多項式 $(x^{100} + 1)^{100} + (x^2 + 1)^{100} + 1$ は多項式 $x^2 + x + 1$ で割り切れるか.

(2003・京都大学)

2019 年度 FG 数学 IAIIB 【解答】 5 講

3 3 A (1) 軸 $x = 1$, 頂点 $(1, 1)$ (2) 軸 $x = \frac{3}{2}$, 頂点 $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right)$

(3) 軸 $x = -\frac{1}{2}$, 頂点 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$ 【解法】平方完成



3 4 A (1) $x = 5$ のとき最大値 5, $x = 3$ のとき最小値 1

(2) $x = 1$ のとき, 最大値 $\frac{7}{2}$, $x = -2$ のとき最小値 -10 【解法】平方完成

3 5 A (1) $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 5$ (2) $y = 2x^2 - 5x + 2$

【解法】(1) $y = a(x - p)^2 + q$ 型 (2) $y = ax^2 + bx + c$ 型

3 6 B (1) $y = 2x^2 + 1$ または, $y = 2(x - 1)^2 + 3$ (2) $(a, b) = (7, 9)$

【解法】2 次関数なので, 平行移動・対称移動は「頂点と最高次係数」に着目

3 7 B $(a, b) = (2, 5), (-2, 9)$ 【解法】 $y = a(x - p)^2 + q$ 型

3 8 B (1) $m(a) = \begin{cases} 1 & (a < 0) \\ -4a^2 + 1 & (0 \leq a \leq 1) \\ -8a + 5 & (a > 1) \end{cases}$

(2) $M(a) = \begin{cases} -8a + 5 & \left\{ a < \frac{1}{2} \right\} \\ 1 & \left\{ a \geq \frac{1}{2} \right\} \end{cases}$

【解法】(1) 下に凸の最小値 $\Rightarrow$ 軸が変域の内か外かで場合分け (3 パターン)

(2) 下に凸の最大値 $\Rightarrow$ 軸が変域の真ん中より右寄りか左寄りかで場合分け (2 パターン)

3 9 C $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ のとき最大値 $\frac{5}{8}$, $(x, y) = (-1, 0)$ のとき最小値 $-\frac{1}{2}$

4 0 C 2 と 8

チャレ 5 (1) $k = 6$ (2) $m(k) = k - 4, M(k) = k + 5$ (3) 最大値 $k + 4$

2019 年度 FG 数学 IAIIB 【解答】 6 講

4 1 A (1) 右図 (2) $0 < k < 4$

【解法】 (1) 全体絶対値のグラフ $\Rightarrow$ 折り返し (2) 定数分離 (済)

4 2 A $(a, b) = (-1, 1)$

【解法】 結論からお迎え (解 $\Leftrightarrow$ 因数)

4 3 A $-2\sqrt{6} < k < 2\sqrt{6}$

【解法】 不等式 = グラフの上下に帰着

4 4 A (1) $-6 < a < \frac{10}{3}$ (2) $a < -1$

【解法】 不等式 = グラフの上下に帰着

4 5 B $-5 < k < -4$

【解法】 方程式の解 $\Leftrightarrow$ グラフの共有点の x 座標に対応

(i) 定数分離 (ii) 絶対値分離 のいずれでも解ける

4 6 B $2 \leq k < \frac{5}{2}$

【解法】 2 次方程式の解の配置問題

「解 $\Leftrightarrow$ 共有点」の対応を利用して、「軸, 端点, 判別式」の利用

