逆手

$\boxed{1}$ $(0 \leqq t \leqq 2)$.

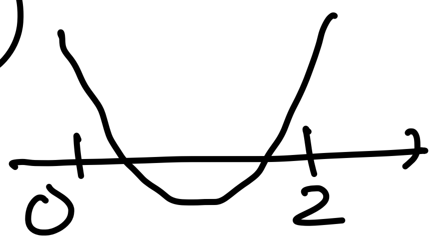
$x^2-2tx+2t^2-4=0$ の解 x の範囲

tで整理して、tの存在条件へ帰着

$2t^2-2x\cdot t+(x^2-4)=0$

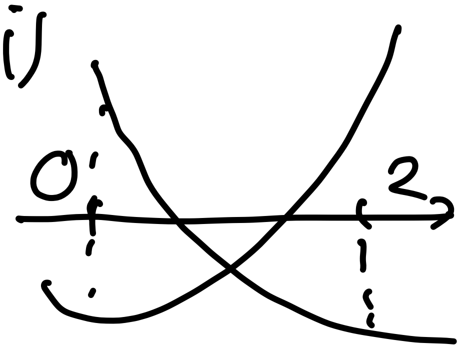
$f(t)=2t^2-2xt+(x^2-4)$

(i)



$$\begin{cases} D \geqq 0 \\ \text{軸}\ 0 \leqq \frac{x}{2} \leqq 2 \\ \text{端}\ f(0) \geqq 0 \\ \quad\ f(2) \geqq 0 \end{cases}$$

(ii)



$f(0)\times f(2) \leqq 0$

⋮

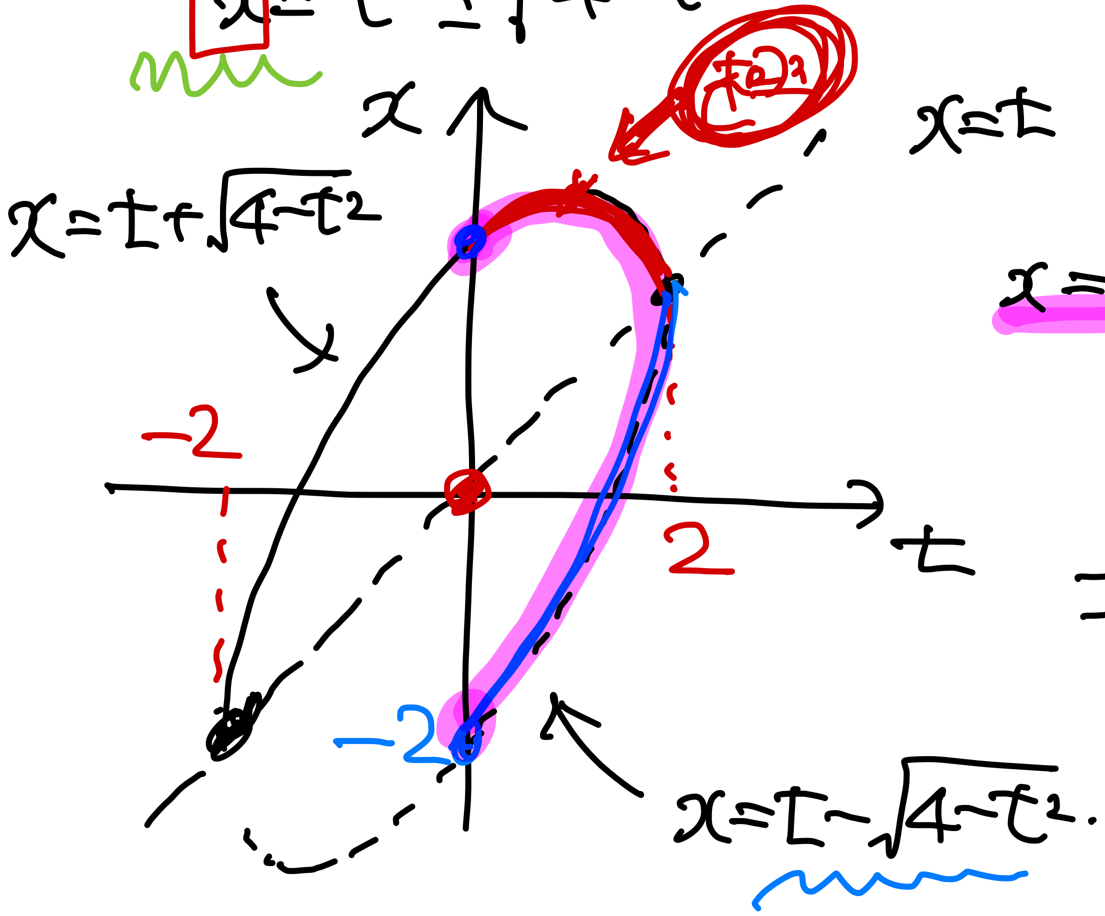
$-2 \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$

$(x-t)^2 = 4-t^2$

$\boxed{x}^2 - 2t\boxed{x} + 2t^2 - 4 = 0$ $(0 \leqq t \leqq 2)$

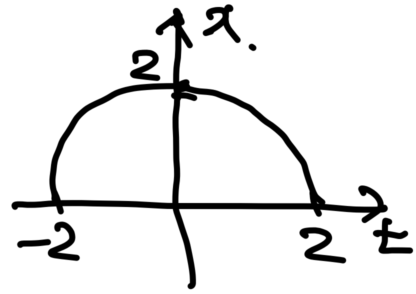
$\boxed{x}$の範囲 ⇒ xを固定

$\boxed{x} = t \pm \sqrt{4-t^2}$



$\pm$

$x=\sqrt{4-t^2}$



ビワン

$0 \leqq t \leqq 2$ より

極大

$-2 \leqq x \leqq \boxed{2\sqrt{2}}$

順手法, 自然法

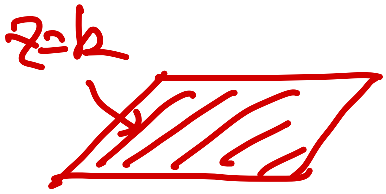
$$k = \frac{x+2y+5}{x^2+y^2+15} \quad (x, y：実数値).$$

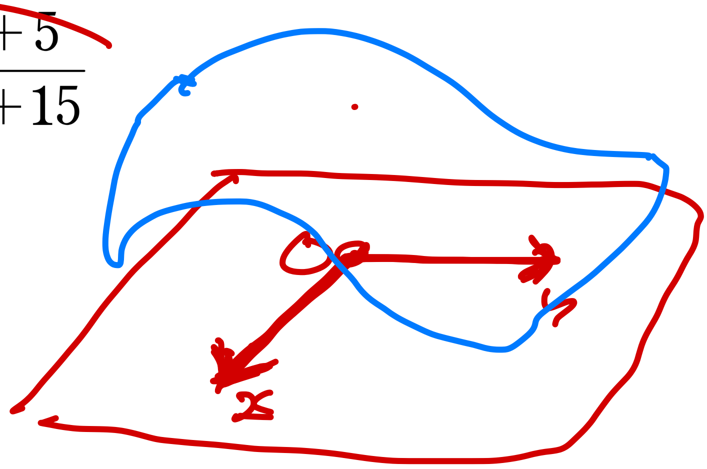
とおき　kのとる範囲を求めよ.

kは, x, yの2変数関数

(考察)

$$\overbrace{k}^{z} = \overbrace{\frac{x+2y+5}{x^2+y^2+15}}^{z}$$





アイディア.

曲面. $z=\dfrac{x+2y+5}{x^2+y^2+15}$ と

平面 $z=k$ が共有点をもつための

kの条件を求める.

(x, y, k)

(別解)

$k = \dfrac{x+2y+5}{x^2+y^2+15}$ とおき、kの範囲を求める。

主役 ⇒ 定数扱い

実験 $k=1$ 代入

$1 = \dfrac{x+2y+5}{x^2+y^2+15}$

$\dfrac{5}{4} - 10$

$x^2+y^2-x-2y+10=0$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = -\dfrac{35}{4}$

$\ominus$

円なら (半径)^2 $\oplus$

(x, y)は存在しない。

$k=1$ は範囲外

⇓

$k(x^2+y^2+15) = x+2y+5$

円 $x^2+y^2+15=0$ と直線 $x+2y+5=0$ の交点を通る。 円 ($k=0$ だけは直線)

円束. 曲線束

(別解)

$$k = \frac{x+2y+5}{x^2+y^2+15}$$ とおき，kの範囲を求める.

主役 ⇒ 定数扱い

⇒ kに対して，(x, y)が存在する条件
実数の組

$$k(x^2+y^2+15) = x+2y+5$$

(i) $k \neq 0$ のとき

$$x^2+y^2+15 = \frac{1}{k}(x+2y+5)$$

$$(x- \quad)^2+(y- \quad)^2 = \boxed{\quad}$$

正 または 0

円　　1点

第8講　三角比 (2)

三角形 ABC の辺の長さを BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$ とする．また，$\angle$A $= A$，$\angle$B $= B$，$\angle$C $= C$ とする．

$\boxed{1}$ 正弦定理 ← 証 円周角定理

三角形 ABC の外接円の半径を R とすると，

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$\boxed{2}$ 余弦定理 ← 証 三平方定理(二点間距離公式)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$\boxed{3}$ 鋭角三角形・直角三角形・鈍角三角形

「A が鋭角」 $\iff \cos A > 0 \iff b^2 + c^2 > a^2$

「A が直角」 $\iff \cos A = 0 \iff b^2 + c^2 = a^2$

「A が鈍角」 $\iff \cos A < 0 \iff b^2 + c^2 < a^2$

$\boxed{4}$ 三角形の成立条件

3 つの正の数 a，b，c に対して，これを 3 辺の長さとする三角形が存在するための条件は，

$$b + c > a \text{ かつ } c + a > b \text{ かつ } a + b > c$$

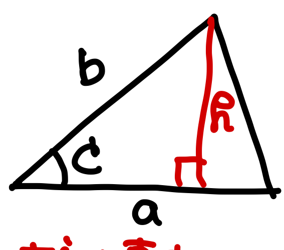
$\boxed{5}$ 角の大小と辺の長さの大小

$$A > B \iff \cos A < \cos B \iff a > b$$

$\boxed{6}$ 三角形の面積

三角形 ABC の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}a\overbrace{b\sin C}^{h}$$

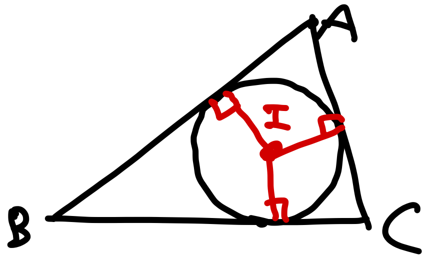


$\frac{1}{2}$×底辺×高さ

$\boxed{7}$ 内接円の半径と面積の関係

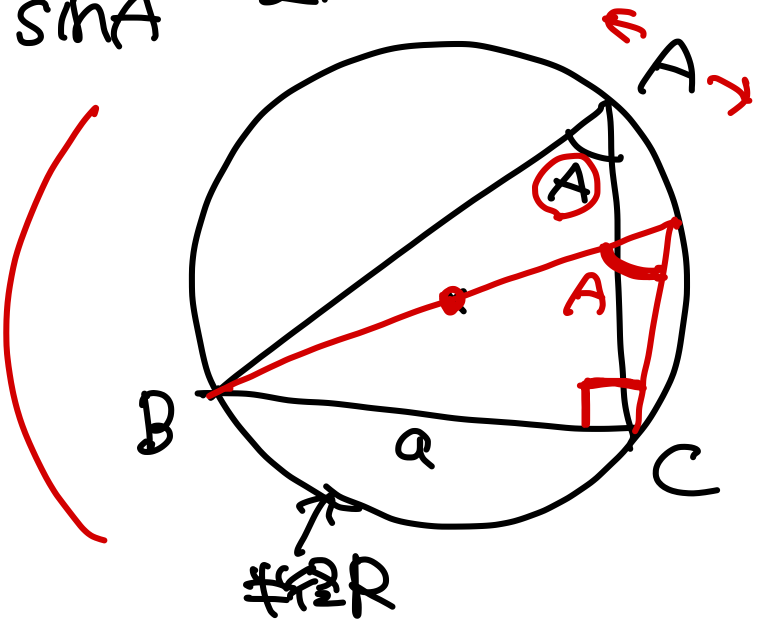
三角形 ABC の面積を S，内接円の半径を r とすると，

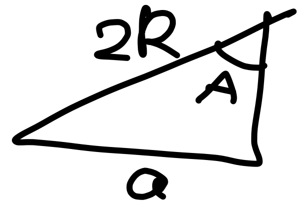
$$S = \frac{1}{2}(a + b + c)r$$



$\boxed{\text{正弦定理}}$ ← 円周角定理

$\frac{a}{\sin A}=2R$ のみ示~~す~~せばよい





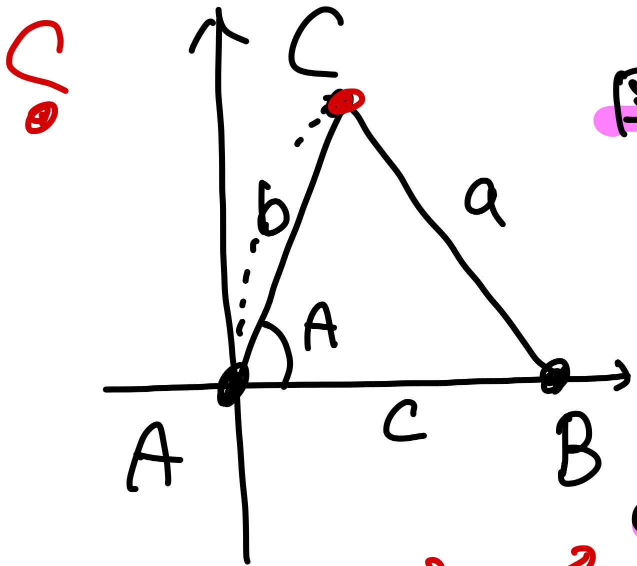
$a=2R\cdot\sin A$ //

以上はAが鋭角のときに限る

Aが直角、鈍角のときも示せばOK.

$\boxed{\text{余弦定理}}$ ← 三平方の定理 の拡張

直角△



BC^2

図のように座標をとる.

$A(0,0)$

$B(c,0)$

$C(b\cos A,\ b\sin A)$

$$a^2=(c-b\cos A)^2+(0-b\sin A)^2$$

$$=c^2-2bc\cdot\cos A+\underbrace{b^2\cos^2 A+b^2\sin^2 A}_{=b^2}$$

$$=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$

57 A

(1) 三角形 ABC において，$\mathrm{BC}=\sqrt{2}$，$\angle\mathrm{A}=45^\circ$，$\angle\mathrm{B}=60^\circ$ とする．このとき，辺 CA の長さおよび三角形 ABC の外接円の半径を求めよ．

$\boxed{57\mathrm{A}}$ (1) $\mathrm{CA}=\sqrt{3}$, $R=1$ (2) $\mathrm{BC}=7$, $S=10\sqrt{3}$

【解法】正弦定理，余弦定理，△の面積公式

(1) (2)

(2) 三角形 ABC において，$\mathrm{AB}=8$，$\mathrm{AC}=5$，$\angle\mathrm{A}=60^\circ$ とする．このとき，辺 BC の長さおよび三角形 ABC の面積を求めよ．

59 A

3 辺の長さが 3，5，x の三角形 T がある．

(1) x のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) T が鈍角三角形となるような x の値の範囲を求めよ．

$\boxed{57\text{A}}$ (1) $CA=\sqrt{3},\ R=1$ (2) $BC=7,\ S=10\sqrt{3}$

【解法】正弦定理，余弦定理，△の面積公式

$\boxed{58\text{A}}$ (1) $\angle C=90^\circ$ の直角三角形 (2) $a=b$ の二等辺三角形または $\angle C=90^\circ$ の直角三角形

【解法】三角形の形状決定問題＝正弦・余弦定理で辺だけの式にする。

$\boxed{59\text{A}}$ (1) $2<x<8$ (2) $2<x<4,\ \sqrt{34}<x<8$

【解法】(1)三角形の成立条件　正の数 a,b,c を三辺に持つ三角形が存在 ⇔ $|b-c|<a<b+c$

(2)鋭角・鈍角の判定 ＝ 三平方 あるいは 余弦定理からの類推

$\boxed{58}$

(2) $a\cdot\cos A=b\cdot\cos B$

$$a\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

×abc

$$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$$

$$\cancel{a^2b^2}+a^2c^2-a^4=b^2c^2+\cancel{a^2b^2}-b^4$$

一文字整理　次数の低いC　$(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

$$(a^2-b^2)c^2-(a^4-b^4)=0$$

$$(a^2-b^2)c^2-(a^2-b^2)(a^2+b^2)=0$$

$$(a^2-b^2)(c^2-(a^2+b^2))=0$$

$a^2=b^2$ または $c^2=a^2+b^2$

$a=b$ の二等辺△　または ∠C直角の直角△

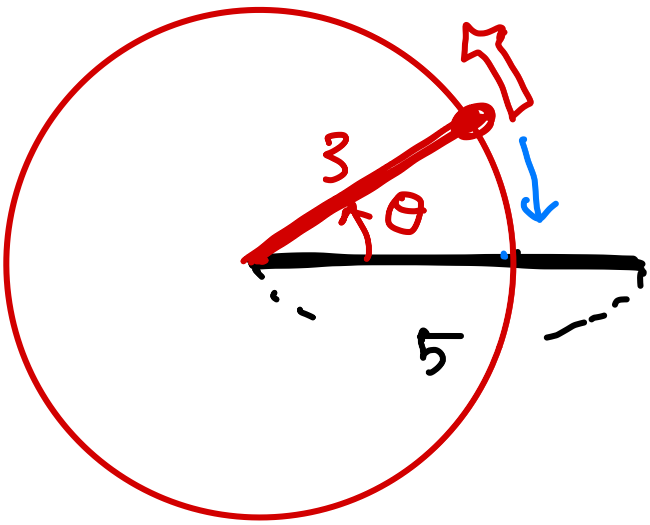
59 (1) 三角形の成立条件 p.36 4 (2) 鋭角・鈍角の判定 p.36. 3

3辺の長さが3, 5, xの三角形Tがある.

(1) xのとり得る値の範囲を求めよ.

(2) Tが鈍角三角形となるようなxの値の範囲を求めよ.

公式を用いるかどうか



(1) 図より

$$\underset{差}{2} < x < \underset{和}{8}$$

$\boxed{|b-c| < a < b+c \text{ 型}}$

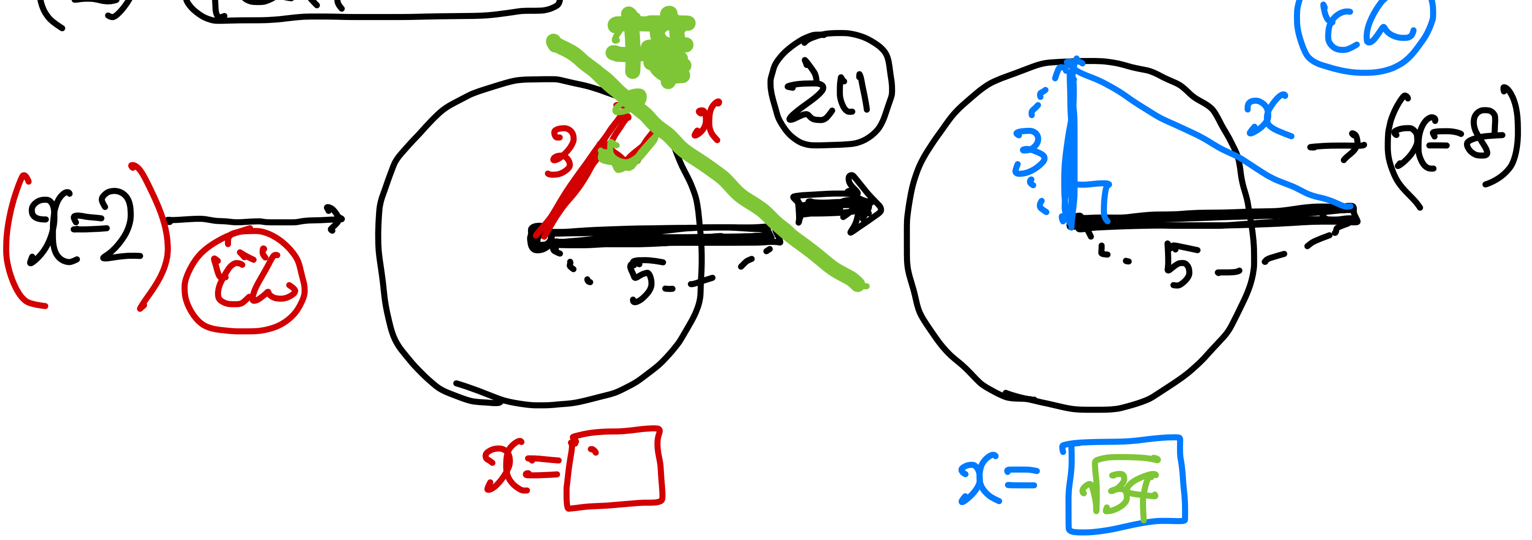
補足 三角形の成立条件 p.36

正の数a, b, cを三辺にもつ△が存在

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < b+c \\ b < c+a \Leftrightarrow b-c < a \\ c < a+b \Leftrightarrow c-b < a \end{cases}$$

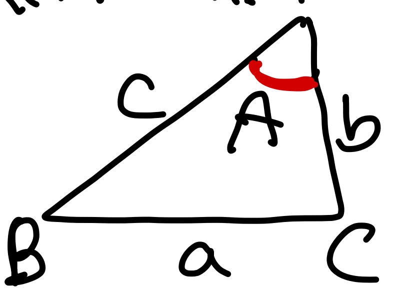
$$\Leftrightarrow \underset{差}{|b-c|} < a < \underset{和}{b+c}$$

(2) 限界状況 = 直角三角形



$2 < x < \boxed{4}$ 　 $\boxed{\sqrt{34}} < x < 8$

《補足》



Aが鋭角

$\Updownarrow$

$\cos A > 0$

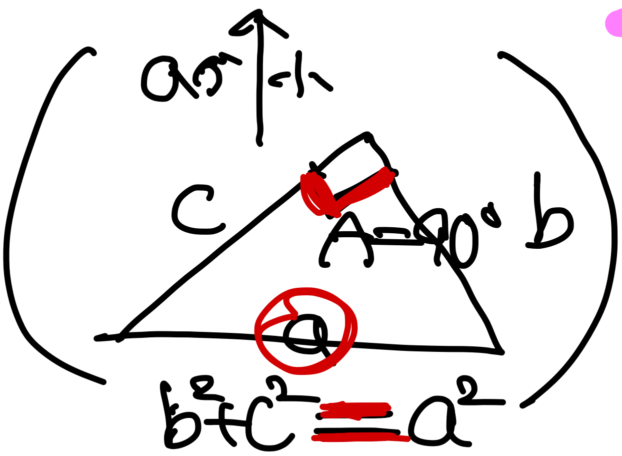
$\Updownarrow$

$b^2+c^2 > a^2$

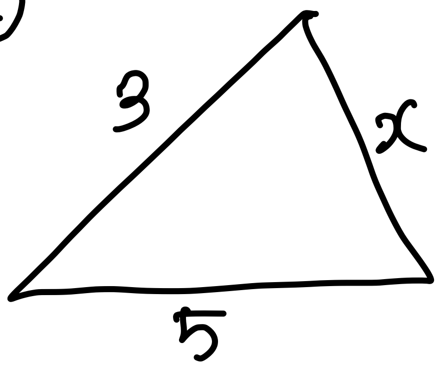
小

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

＋

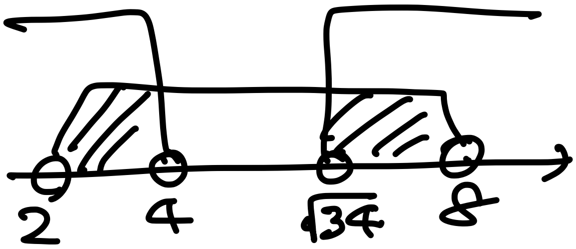


(2)



(1)より、$2<x<8$のもとで

$$\begin{cases} x^2 > 3^2+5^2 \iff x > \sqrt{34} \\ \text{または} \\ 5^2 > 3^2+x^2 \iff x < 4 \end{cases}$$



$2<x<4,\ \sqrt{34}<x<8$ //

60 B

三角形 ABC において，$AB=3$，$AC=5$，$\angle BAC=120^\circ$ とする．

(1) 辺 BC の長さを求めよ．

(2) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(3) 三角形 ABC の内接円の半径を求めよ．

$\boxed{60\text{B}}$ (1) $BC=7$ (2) $S=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$ (3) $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解法】余弦，面積，内接円半径

$S=\frac{1}{2}(a+b+c)r.$

61 B

正弦より，$a:b:c=6:5:4$ → $\begin{cases} a=6k \\ b=5k \\ c=4k \end{cases}$ と表せる

三角形 ABC において，$\sin A:\sin B:\sin C=6:5:4$ とする．

(1) $\cos A$，$\sin A$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 三角形 ABC の面積が $\dfrac{15\sqrt{7}}{7}$ のとき，三角形 ABC の外接円の半径を求めよ．

余弦

$\boxed{61\text{B}}$ (1) $\cos A=\dfrac{1}{8}$，$\sin A=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$ (2) $R=\dfrac{16}{7}$

形 shape.

【解法】(1)正弦から辺の比，余弦から cos，相互関係から sin，
(2)面積から辺そのもの，正弦から外接円半径

$R=\frac{3}{\sqrt{7}}$ より $a=\frac{15}{\sqrt{7}}$

62 B

三角形 ABC において，$AB=5$，$AC=4$，$\angle A=60^\circ$ とする．さらに，$\angle A$ の二等分線が辺 BC と交わる点を D，三角形 ABC の内接円の中心を I とする．

(1) 線分 AD の長さを求めよ．

(2) 線分 DI の長さを求めよ．

2019年度　FG　数学IAIIB　【解答】8講

$\boxed{57A}$ (1)　$CA=\sqrt{3},\ R=1$　(2)　$BC=7,S=10\sqrt{3}$

【解法】正弦定理，余弦定理，△の面積公式

$\boxed{58A}$ (1)　∠C＝90°の直角三角形　(2)　$a=b$の二等辺三角形または∠C＝90°の直角三角形

【解法】三角形の形状決定問題＝正弦・余弦定理で辺だけの式にする。

$\boxed{59A}$ (1)　$2<x<8$　(2)　$2<x<4,\sqrt{34}<x<8$

【解法】(1)三角形の成立条件　　正の数a,b,cを三辺に持つ三角形が存在　⇔　$|b-c|<a<b+c$

(2)鋭角・鈍角の判定　＝　三平方　あるいは　余弦定理からの類推

$\boxed{60B}$ (1)　$BC=7$　(2)　$S=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$　(3)　$r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解法】余弦，面積，内接円半径

$\boxed{61B}$ (1)　$\cos A=\dfrac{1}{8},\ \sin A=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$　(2)　$R=\dfrac{16}{7}$

【解法】(1)正弦から辺の比，余弦からcos，相互関係からsin，

(2)面積から辺そのもの，正弦から外接円半径

$\boxed{62B}$ (1)　$AD=\dfrac{20\sqrt{3}}{9}$　(2)　$DI=\sqrt{7}-\dfrac{7\sqrt{3}}{9}$

【解法】(1)面積利用　or 余弦定理（計算量多い），(2)T&E

63 C

三角形ABCにおいて，AB $=15$，BC $=13$，CA $=8$ である．点Pが辺AB上に，点Qが辺AC上にあり，線分PQが三角形ABCの面積を二等分するように動くとき，線分PQの長さの最小値を求めよ．

64 C

実数 x に対して，3辺の長さがそれぞれ $2x-1$，x^2-2x，x^2-x+1 で表される三角形 T がある．このとき，T の3つの内角のうち，最大の角の大きさを求めよ．

入試問題にチャレンジ (8)

三角形ABCにおいて，頂点Aから直線BCに下ろした垂線の長さは1，頂点Bから直線CAに下ろした垂線の長さは $\sqrt{2}$，頂点Cから直線ABに下ろした垂線の長さは2である．

このとき，三角形ABCの面積と，内接円の半径，および，外接円の半径を求めよ．

(2010・千葉大学)

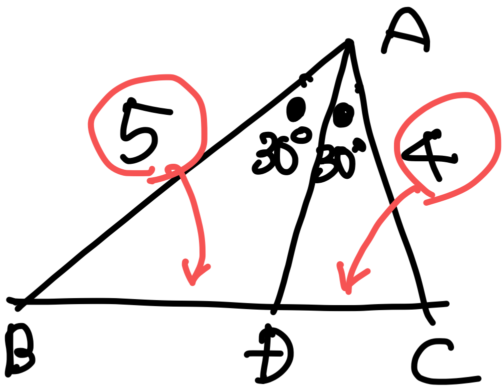
62

三角形 ABC において，AB = 5，AC = 4，∠A = 60° とする．さらに，∠A の二等分線が辺 BC と交わる点を D，三角形 ABC の内接円の中心を I とする．

内心

(1) 線分 AD の長さを求めよ．

(2) 線分 DI の長さを求めよ．



余弦より

$BC^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos 60° = 21$

$\therefore BC = \sqrt{21}$

角の二等分線の性質より

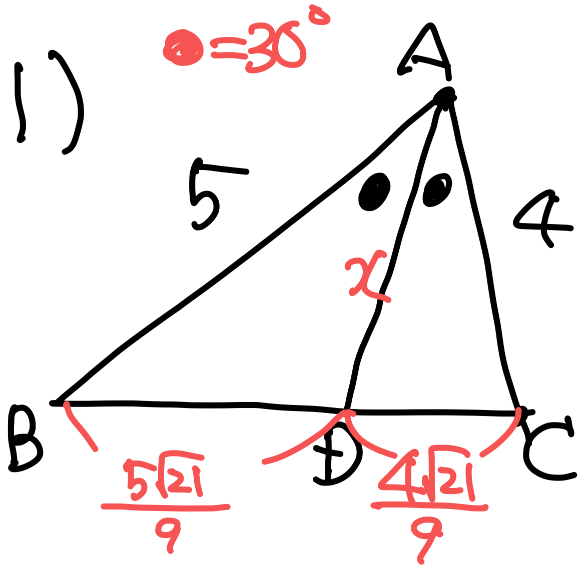
$BD : DC = 5 : 4$

よって $BD = \frac{5}{5+4} \cdot BC = \frac{5\sqrt{21}}{9}$

同様に $DC = \frac{4\sqrt{21}}{9}$

(1)

● = 30°



[解1]

余弦定理を利用

$\frac{20\sqrt{3}}{9}$ //

[解2] 面積を利用

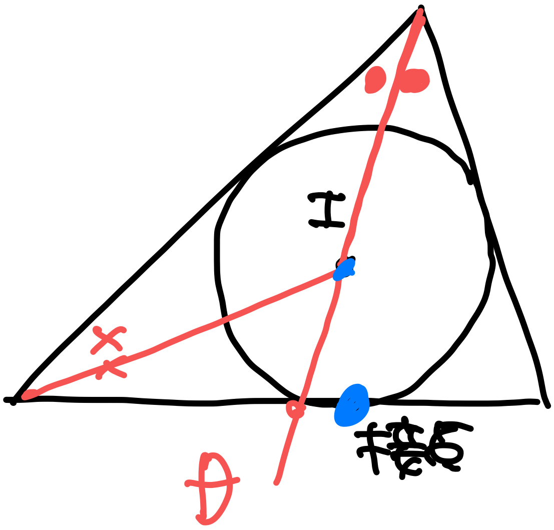
（有名角のときのみ有効）

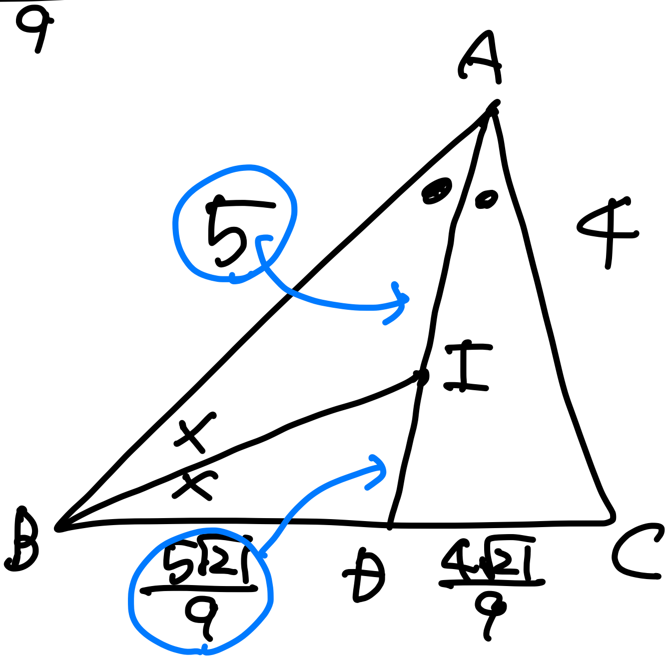
$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$

$\cancel{\frac{1}{2}} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \sin 60° = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot 5 \cdot x \cdot \sin 30° + \cancel{\frac{1}{2}} \cdot 4 \cdot x \cdot \sin 30°$

$10\sqrt{3} = \frac{9}{2}x \qquad \therefore x = \frac{20\sqrt{3}}{9}$ //

(2) $\boxed{答}$ $DI = \sqrt{7} - \dfrac{7\sqrt{3}}{9}$





$\dfrac{20\sqrt{3}}{9}$

$$AI = \frac{\frac{5\sqrt{21}}{9}}{5 + \frac{5\sqrt{21}}{9}} \times AD$$

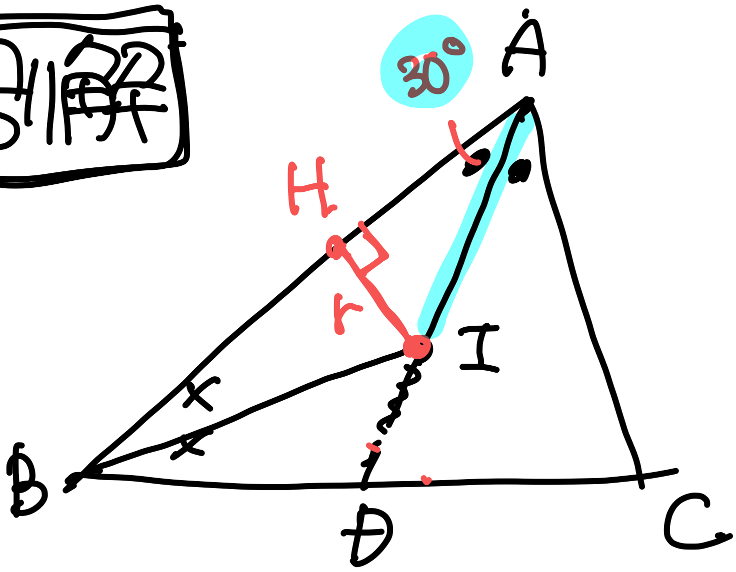
$$= \frac{\sqrt{21}}{9+\sqrt{21}} \times \frac{20\sqrt{3}}{9}$$

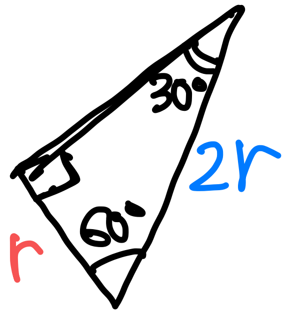
$$\frac{\sqrt{21}(9-\sqrt{21})}{81-21} = \frac{9\sqrt{21}-21}{60}$$

$$= \frac{9\sqrt{21}}{60} \times \frac{20\sqrt{3}}{9} - \frac{21}{60} \times \frac{20\sqrt{3}}{9}$$

$$= \underline{\sqrt{7} - \frac{7\sqrt{3}}{9}} \; //$$

別解





$$AD = \frac{20\sqrt{3}}{9}$$

より

AI

$$ID = AD - 2r$$

$$r = \boxed{\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\times5\times4\times\sin60^\circ = \frac{1}{2}\left(5+4+\sqrt{21}\right)\times r\right)$$

$$\therefore\ ID = \frac{20\sqrt{3}}{9} - \left(3\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)$$

$$= \sqrt{7} - \frac{7\sqrt{3}}{9}$$

$\boxed{63}$ $2\sqrt{15}$

$\boxed{64}$ 120°

チャレ(8)　方針のみ　$\triangle ABC = \dfrac{4\sqrt{7}}{7}$

$r = \dfrac{2(3-\sqrt{2})}{7}$,　$R = \dfrac{8\sqrt{2}}{7}$

(
△における垂線の長さ

$\Longrightarrow$ 高さとみなす

(面積利用)
)