5/27 数学ゼミ 国立組

- 昭和0の正四面体 (管)
- ワIC $\boxed{\text{管}}$
- 場合の数と、診断シート
- 11講 コタエアワセ

（正四面体）

過去問めぐり「空間図形」

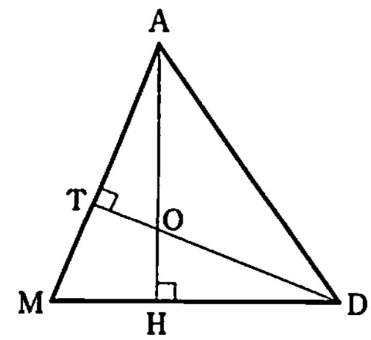
【３】2009 昭和大学 1/25,選抜Ⅰ期(第１次) 医

(3)　半径 r の 4 個の小球が互に外接している。次の各問に答えよ。

(3－1)　各小球の中心を 4 つの頂点とする正三角錐の体積を求めよ。

(3－2)　4 個の小球が内接する球の半径を求めよ。

(3 - 2)点 D から線分 AM に下ろした垂線の足を T とする。線分 TD と線分 AH の交点を O とする。このとき，OA＝OD となり，図形の対称性から，点 O は正四面体 ABCD の外接球の中心である。これが求める球の中心と一致して，求める球の半径は OD＋r となる。



次に，OD の長さを求める。

∠DTM＝∠DHO＝90°，∠TDM＝∠HDO より

$$\triangle DTM \backsim \triangle DHO$$

ゆえに　　DT : DM＝DH : OD

$$OD=\frac{DM\cdot DH}{DT}$$

$DM=\sqrt{3}\,r$，$DH=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}r$，$DT=AH=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r$ を代入して

$$OD=\sqrt{3}\,r\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\,r}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}r=\frac{\sqrt{6}}{2}r$$

したがって，求める円の半径は

$$OD+r=\frac{2+\sqrt{6}}{2}r$$

$n \geqq 3$，$r > 0$ とする．

(1) 半径 r の円に内接する正 n 角形の面積を r と n を用いて表せ．

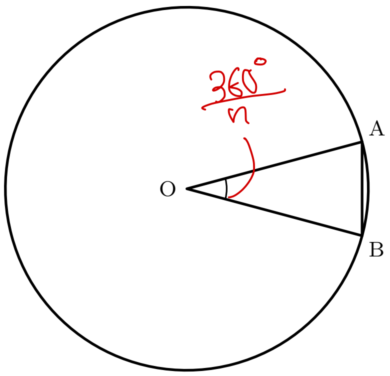
(2) 半径 r の円に外接する正 n 角形の面積を r と n を用いて表せ．

【解答】

(1) 円の中心を O，正 n 角形の隣接する 2 頂点を A，B とし，面積を S とすると，

$$S = n\triangle\text{OAB}. \quad \cdots ①$$

外



また，

$$\angle\text{AOB} = \frac{360^\circ}{n}$$

であり，

$$\text{OA} = \text{OB} = r$$

であるから，

$$\triangle\text{OAB} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin\frac{360^\circ}{n}$$
$$= \frac{1}{2}r^2 \sin\frac{360^\circ}{n}. \quad \cdots ②$$

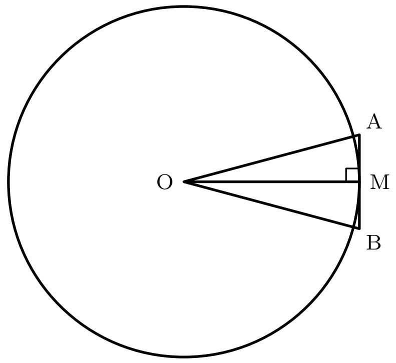
①，②より，

$$S = \frac{n}{2}r^2 \sin\frac{360^\circ}{n}.$$

(2) 円の中心を O，正 n 角形の隣接する 2 頂点を A，B とし，面積を S とすると，

$$S = n\triangle\text{OAB}. \quad \cdots ①$$

内



また，辺 AB の中点を M とすると，

$$\angle\text{AOM} = \frac{180^\circ}{n}$$

であり，

$$\text{OM} = r$$

であるから，

$$\text{AB} = 2\text{AM}$$
$$= 2\text{OM}\tan\angle\text{AOM}$$
$$= 2r\tan\frac{180^\circ}{n}.$$

したがって，

$$\triangle\text{OAB} = \frac{1}{2}\text{AB} \cdot \text{OM}$$
$$= r^2\tan\frac{180^\circ}{n}. \quad \cdots ②$$

①，②より，

$$S = nr^2\tan\frac{180^\circ}{n}.$$

附録１　場合の数・確率の診断テスト

場合の数の基礎

【例題 30】
種類の異なるＴシャツ５枚，Ｇパン３本，服装の選び方は何通りあるか。

【例題 31】
種類の異なるＴシャツ５枚，Ｇパン３本，スカート４枚，服装の選び方は何通りあるか。
ただし，Ｇパンとスカートの重ね着は行わないものとする。

【例題 32】
C,O,M,P,A,N,Y の 7 文字を一列に並べるとき，C と Y が隣り合わない並べ方は何通りあるか。

【例題 33】
S,C,H,O,O,L の 6 文字を一列に並べる並べ方は何通りあるか。

【例題 34】
両親と，子供 4 人で円形に並ぶ。両親が隣り合う並び方は何通りあるか。

【例題 35】
異なる６個の宝石をつないでネックレスを作るとき，作り方は何通りあるか。

【例題 36】
⑴ a,b,c の 3 文字から，重複を許して 5 文字並べて単語を作るとき，作り方は何通りあるか。
⑵A，B，C の 3 つの部屋に，5 人を分ける分け方は何通りあるか。ただし，空き部屋があっても良いものとする。

【例題 37】
⑴ 10 個のりんごを A 君，B 君，C 君の 3 人に分けるとき，分け方は何通りあるか。ただし，1 つももらえない者がいても良いものとする。
⑵ $x+y+z=10$ を満たす 0 以上の整数 x, y, z の組 $\left(x, y, z\right)$ の総数は何組あるか。

問題演習（発展篇）

【例題 38】

異なる 9 冊の本を 3 冊ずつ 3 組に分ける分け方は何通りあるか。

【例題 39】

(1) A，B，C の 3 つの部屋に，5 人を分ける分け方は何通りあるか。

(2) A，B，C の 3 つの部屋に，n 人を分ける分け方は何通りあるか。

ただし，(1)(2)ともに，空き部屋があってはならないものとする。

【例題 40】

赤球 4 個，白球 2 個，黒球 1 個をつないでブレスレットを作る。作り方は何通りあるか。

（発展篇）

【例題 41】

n を正の整数とし，n 個のボールを 3 つの箱に分けて入れる問題を考える。ただし，1 個のボールも入らない箱があってもよいものとする。以下に述べる 4 つの場合について，それぞれ相異なる入れ方の総数を求めよ。

(1)　1 から n までの異なる番号のついた n 個のボールを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合。

(2)　互いに区別のつかない n 個のボールを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合。

(3)　1 から n までの異なる番号のついた n 個のボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合

(4)　n が 6 の倍数 $6m$ であるとき，n 個の互いに区別がつかないボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合。

（東京大）

第11講　場合の数(1)

1 **場合の数，和の法則，積の法則**

ある事柄の起こり方の総数を**場合の数**という．

2つの事柄 A，B があり，これらは**ともに起こること**はないとする．

さらに，A の起こり方が m 通り，B の起こり方が n 通りならば，

A または B のいずれかが起こる場合の数は $m+n$ 通り．

また，2つの事柄 A，B があり，A の起こり方が m 通りあり，そのそれぞれに対して B の起こり方が n 通りあるならば，

A と B がともに起こる場合の数は mn 通り．

2 **順列**

いくつかの異なるものを順序をつけて並べたものを**順列**という．特に，**n 個の異なるものから r 個取って作った順列**の総数は，

$$ {}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (\text{ただし，} 0! = 1 \text{とする}) $$

3 **重複順列**

n 個の異なるものから，同じものを繰り返し取ることを許して r 個取って1列に並べたものを**n 個のものから r 個取る重複順列**といい，その総数は n^r である．

4 **円順列**

異なる n 個のものの円順列の総数は，

$$ (n-1)! $$

81 A

全体集合をU，その部分集合をA，Bとする．また，

$$n(U)=50,\quad n(A\cup B)=42,\quad n(A\cap B)=3,\quad n(\overline{A}\cap B)=15$$

である．このとき，次のものを求めよ．

(1) $n(\overline{A}\cap\overline{B})$

(2) $n(B)$

(3) $n(A\cap\overline{B})$

(4) $n(A)$

$\boxed{8\ 1\text{A}}$ (1) 8 (2) 18 (3) 24 (4) 27

【解法】集合の個数，ベン図，ド・モルガンの法則

82 A

1から100までの整数のうち，次の整数の個数を求めよ．

(1) 3の倍数かつ5の倍数の個数．

(2) 3の倍数または5の倍数の個数．

(3) 3の倍数であって5の倍数ではないものの個数．

$\boxed{8\ 2\text{A}}$ (1) 6 (2) 47 (3) 27

【解法】集合の個数，ベン図

83 A 出題ミス？

(1) 2個のさいころを振るとき，2つのさいころの目の和が偶数となる目の出方は何通りあるか．

(2) 3個のさいころを振るとき，3つのさいころの目の積が偶数となる目の出方は何通りあるか．

$\boxed{8\ 3\text{A}}$ (1) 18通り (2) 189通り

【解法】積の法則，和の法則，補集合

84 B

5040 の正の約数の個数を求めよ．さらに，5040 の正の約数の総和を求めよ．

$\boxed{84\mathrm{B}}$ 60 個，総和は 19344

【解法】約数の個数・和の求め方

85 B

7 個の数字 0，1，2，3，4，5，6 から異なる 4 個の数字を選んで，4 桁の整数を作る．

(1) 全部で何個できるか．

(2) 偶数は何個できるか．

(3) 3 の倍数は何個できるか．

$\boxed{85\mathrm{B}}$ (1) 720 個 (2) 420 個 (3) 264 個

【解法】順列

86 B

男子 5 人，女子 3 人の合計 8 人が次のように並ぶときの並び方の総数を求めよ．

(1) 一列に並ぶとき．

(2) 両端が男子であるように並ぶとき．

(3) (2) の並び方のうち，どの 3 人の女子も隣り合わないように並ぶとき．

(4) 円形に並ぶとき．

(5) (4) の並び方のうち，どの 3 人の女子も隣り合わないように並ぶとき．

$\boxed{86\mathrm{B}}$ (1) 40320 通り (2) 14400 通り (3) 2880 通り

(4) 5040 通り (5) 1440 通り

5040 を素因数分解すると，

$$5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

であるから，5040 の正の約数の個数は，

$$(4+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 60\,\text{個}.$$

さらに，5040 の正の約数の総和は，

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3+3^2)(1+5)(1+7) = 19344.$$

87 C

1000 から 9999 までの 4 桁の自然数について，次の問に答えよ．

(1) 1 が使われているものはいくつあるか．

(2) 1，2 の両方が使われているものはいくつあるか．

(3) 1，2，3 のすべてが使われているものはいくつあるか．

88 C

1，2，3，4，5，6，7，8 の 8 つの数字から異なる 4 個の数字を用いてできる 4 桁の整数を小さい順に並べた．

(1) 5673 は何番目の整数か．

(2) 111 番目の整数は何か．

入試問題にチャレンジ (11)

次の条件を満たす正の整数全体の集合を S とおく．

「各桁の数字は互いに異なり，どの 2 つの桁の数字の和も 9 にならない．」

ただし，S の要素は 10 進法で表す．また，1 桁の正の整数は S に含まれるとする．

(1) S の要素でちょうど 4 桁のものは何通りあるか．

(2) 小さい方から数えて 2000 番目の S の要素を求めよ．

(2000・東京大学)

11講 補充-1

G，O，U，K，A，K，U の 7 文字を 1 列に並べるとき，同じ文字が隣り合わないような並べ方は何通りあるか。

2019 年度　FG　数学 IAIIB　【解答】１１講

$\boxed{８１A}$　(1)　8　(2)　18　(3)　24　(4)　27

【解法】集合の個数，ベン図，ド・モルガンの法則

$\boxed{８２A}$　(1)　6　(2)　47　(3)　27

【解法】集合の個数，ベン図

$\boxed{８３A}$　(1)　18 通り　(2)　189 通り

【解法】積の法則，和の法則，補集合

$\boxed{８４B}$　60 個，総和は 19344

【解法】約数の個数・和の求め方

$\boxed{８５B}$　(1)　720 個　(2)　420 個　(3)　264 個

【解法】順列

$\boxed{８６B}$　(1)　40320 通り　(2)　14400 通り　(3)　2880 通り　(4)　5040 通り　(5)　1440 通り

【解法】順列

第12講　場合の数(2)

1　組合せ

n 個の異なるものから r 個を取り出して1組にしたものを **n 個のものから r 個取り出した組合せ** といい，その総数は，

$$_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

2　基本的な公式

(i)　$_n\mathrm{P}_r = r!\,_n\mathrm{C}_r$

(ii)　$_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$

(iii)　$_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

(iv)　$k\,_n\mathrm{C}_k = n\,_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$

3　同じものを含む順列

n 個のもののうち，p 個，q 個，r 個，$\cdots$ がそれぞれ同じものであるとき，この n 個のものを並べてできる順列の総数は，

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots}$$

$$(p+q+r+\cdots=n)$$

89 A

男子 3 人，女子 4 人について，次のような方法は何通りあるか.

(1) 7 人から 3 人を選んで一列に並べる方法.

(2) 7 人から 3 人を選ぶ方法.

(3) 女子 2 人，男子 1 人を選んで一列に並べる方法.

90 A

次の問に答えよ.

(1) a，a，a，b，b，b，b，c の 8 文字を一列に並べる順列は何通りあるか.

(2) FUJIGAKUIN のすべての文字を使ってできる順列のうち，どの U も，どの I より左側にあるものは何通りあるか.

91 A

平面上の 10 本の直線が，どの 2 本も平行ではなく，どの 3 本も 1 点で交わらないとき，交点はいくつあるか. また，三角形はいくつできるか.

92 B

生徒 9 人を次の 3 つのグループに分ける方法は何通りあるか.

(1) 4 人，3 人，2 人の 3 つのグループに分ける.

(2) 3 人ずつ，3 つのグループ，A，B，C に分ける.

(3) 3 人ずつ，3 つのグループに分ける.

(4) 2 人，2 人，5 人の 3 つのグループに分ける.

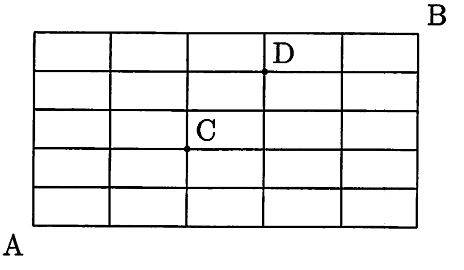
93 B

図のような道路において，最短経路で A から B に行く道順を考える.

(1) 道順は全部で何通りあるか.

(2) C も D も通る道順は何通りあるか.

(3) C も D も通らない道順は何通りあるか.



94 B

5 個の数字 1，2，3，4，5 から異なる 3 個の数字を選ぶとき，最小の数字が 2 以下で，最大の数字が 4 以上である 3 個の数字の選び方の総数を求めよ.

95 C

白玉 1 個，赤玉 2 個，青玉 4 個がある．

(1) これらを円形に並べる方法は何通りあるか．

(2) これらで何通りのネックレスができるか．

96 C

円周上に n 個の点 P_1，P_2，$\cdots$，P_n があり，これらを結ぶ異なる 2 本の弦の組を考える．ただし $n \geqq 4$ とする．1 つの端点を共有する 2 本の弦の組の個数を a_n，共有点のない 2 本の弦の組の個数を b_n とするとき，$a_n = b_n$ となるような n の値を求めよ．

入試問題にチャレンジ (12)

生徒 14 人から 2 人ずつの組を n 組 $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7)$ 作る作り方を S_n とする．

(1) S_n を n の式で表せ．

(2) S_n を最大にする n をすべて求めよ．

(2005・神戸大学)

2019 年度　FG　数学 IAIIB　【解答】１２講

$\boxed{\text{８９A}}$　(1)　210 通り　(2)　35 通り　(3)　108 通り

【解法】組み合わせ

$\boxed{\text{９０A}}$　(1)　280 通り　(2)　151200 通り

【解法】(1)同じものを含む順列，(2)順番 Keep 問題

$\boxed{\text{９１A}}$　交点 45 個，三角形 120 個

【解法】対応関係（組み合わせ利用）

$\boxed{\text{９２B}}$　(1)　1260 通り　(2)　1680 通り　(3)　280 通り　(4)　378 通り

【解法】組分け問題

$\boxed{\text{９３B}}$　(1)　252 通り　(2)　54 通り　(3)　81 通り

【解法】最短経路，ベン図

$\boxed{\text{９４B}}$　8 通り

【解法】数え上げ　または　くり抜き