11. 補足-2　Eや2

第12コウ　のこり

96C. Fやし2

第13コウ

A, B まで・

103Cのじゅんび

和が▨の倍数 ⇒ あまりで分類
Type分け.

積が▨の倍数 ⇒ 素因数に着目

11講・補充-2

異なるn個のサイコロを投げる

(1) 積が2の倍数となるのは何通りか。

(2) 積が6の倍数となるのは何通りか。

(3) 積が4の倍数となるのは何通りか。

(4) 積が12の倍数

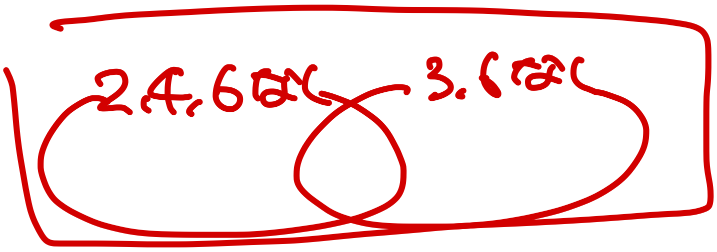
(1) 積が2の倍数

1〜n個

⇒ 2の倍数が少なくとも1個出る

$6^n - 3^n$

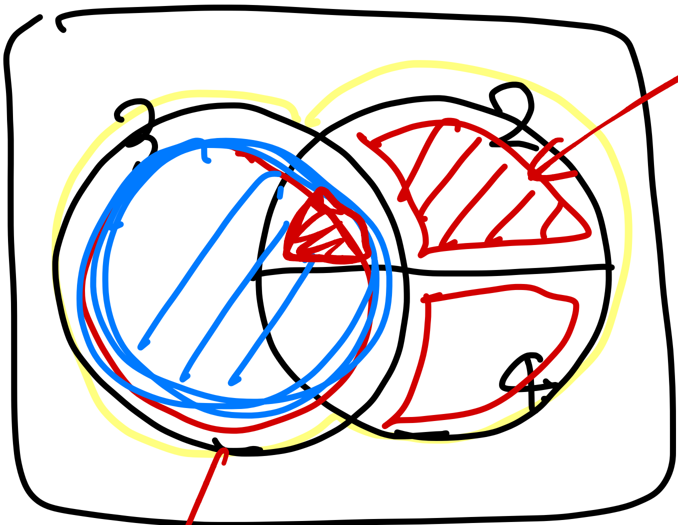
(2)



$$6^n \times \left\{ 1-\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(1+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}$$

$$6^n - \left(1+\frac{2}{3}n\right)\times 3^n - 4^n + \left(1+\frac{n}{2}\right)\cdot 2^n$$

$$= 6^n - 4^n - (3+2n)\times 3^{n-1} + (2+n)\cdot 2^{n-1}$$



3の倍数ではない.

1, 2, 4, 5

2 ~~4~~ が1回だけ

のこり 1, 5

$_nC_1 \times 1 \times 2^{n-1}$

=

$$6^n - 4^n - 3^n + 2^n - (\qquad) - (\qquad\qquad)$$

95 C

白玉1個，赤玉2個，青玉4個がある.

(1) これらを円形に並べる方法は何通りあるか.

(2) これらで何通りのネックレスができるか.

96 C

円周上に n 個の点 P_1，P_2，$\cdots$，P_n があり，これらを結ぶ異なる2本の弦の組を考える. ただし $n \geqq 4$ とする. 1つの端点を共有する2本の弦の組の個数を a_n，共有点のない2本の弦の組の個数を b_n とするとき，$a_n = b_n$ となるような n の値を求めよ.

入試問題にチャレンジ (12)

生徒14人から2人ずつの組を n 組 ($n = 1$，2，3，$\cdots$，7) 作る作り方を S_n とする.

(1) S_n を n の式で表せ.

(2) S_n を最大にする n をすべて求めよ.

(2005・神戸大学)

n 個の点 P_1，P_2，$\cdots$，P_n から 3 個の点を選び，その 3 点を結んで得られる三角形 T について考える．

ここで，三角形 T の 3 辺のうち，2 辺を選ぶと 1 つの端点を共有する 2 本の弦ができる．

したがって，

$$\begin{aligned} a_n &= {}_n\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_2 \\ &= \frac{1}{2}n(n-1)(n-2). \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

さらに，n 個の点 P_1，P_2，$\cdots$，P_n から 4 個の点を選び，その 4 点を結んで得られる四角形 S について考える。

ここで，四角形 S において，共有点をもたない 2 辺の組合せは 2 通りある．

したがって，

$$\begin{aligned} b_n &= {}_n\mathrm{C}_4 \times 2 \\ &= \frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3). \qquad \cdots ② \end{aligned}$$

①，②より，$a_n = b_n$ が成り立つ条件は，

$$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2) = \frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

なので，$n \geqq 4$ より，

$$n - 3 = 6.$$

よって，求める n の値は，

$$n = 9.$$

入試問題にチャレンジ (12)

生徒 14 人から 2 人ずつの組を n 組 ($n=1, 2, 3, \cdots, 7$) 作る作り方を S_n とする.

(1) S_n を n の式で表せ.

(2) S_n を最大にする n をすべて求めよ.

(2005・神戸大学)

(1) S_n の定め方より,

$$\begin{aligned} S_n &= {}_{14}\mathrm{C}_2 \cdot {}_{12}\mathrm{C}_2 \cdots {}_{14-2(n-1)}\mathrm{C}_2 \div n! \\ &= \frac{14 \cdot 13 \cdots (16-2n)(15-2n)}{2^n \cdot n!} \\ &= \frac{14!}{2^n \cdot n!(14-2n)!}. \end{aligned}$$

(2) $I_n = 2^n \cdot n!(14-2n)!$ とすると, (1) の結果より,

$$S_n \text{が最大} \iff I_n \text{ が最小}$$

が成り立つ.

また, $1 \leqq n \leqq 6$ のとき,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= 2^{n+1}(n+1)!(12-2n)! - 2^n \cdot n!(14-2n)! \\ &= 2^n \cdot n!(12-2n)!\{2(n+1) - (14-2n)(13-2n)\} \\ &= 2^n \cdot n!(12-2n)!(-4n^2 + 56n - 180) \\ &= 2^n \cdot n!(12-2n)!\{-4(n-5)(n-9)\} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{cases} 1 \leqq n \leqq 4 \text{ のとき}, & I_{n+1} - I_n < 0, \\ n = 5 \text{ のとき}, & I_{n+1} - I_n = 0, \\ n = 6 \text{ のとき}, & I_{n+1} - I_n > 0. \end{cases}$$

これより,

$$\begin{cases} I_1 > I_2 > I_3 > I_4 > I_5, \\ I_5 = I_6, \\ I_6 < I_7 \end{cases}$$

であるから, I_n は $n=5, 6$ のとき, 最小となる.

したがって, S_n を最大にする n の値は,

$$n = 5, \quad 6.$$

第13講　場合の数(3)

1 **二項定理**

$(a+b)^n$ を展開することを**二項展開**といい，正の整数 n については,

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

と展開できる．この展開公式を**二項定理**，${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$ を展開式の**一般項**という．係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ は**二項係数**という．

2 **多項定理**

一般に，$(a+b+c)^n$ を展開したときの項

$$a^p b^q c^r \quad (p+q+r=n)$$

の係数は,

$$\frac{n!}{p!q!r!}$$

3 **重複組合せ**

異なる n 種類のものから重複を許して r 個取り出す組合せを**重複組合せ**といい，${}_n\mathrm{H}_r$ と書く．ここで,

$${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$$

が成り立つ.

97 A

$(x+y)^{10}$ の展開式における x^4y^6 の係数を求めよ.

$\boxed{9\ 7\mathrm{A}}$ 210

98 A

11^{11} を 100 で割ったときの余りを求めよ.

$\boxed{9\ 8\mathrm{A}}$ 11

99 A

等式 $6 \cdot {}_n\mathrm{C}_3 - n \cdot {}_n\mathrm{P}_2 + 144 = 0$ を満たす 3 以上の整数 n の値を求めよ.

$\boxed{9\ 9\mathrm{A}}$ $n = 9$

$${}_n\mathrm{P}_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$${}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

100 B

(1) $\left(2x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^6$ の展開式における定数項を求めよ.

(2) $(x^2 + x + 1)^5$ の展開式における x^5 の係数を求めよ.

$\boxed{\text{100B}}$ (1) 60 (2) 51

101 B

次の条件を満たす整数 x, y, z の組は何通りあるか.

(1) $x + y + z = 10$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$

(2) $x + y + z = 10$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$

$\boxed{\text{101B}}$ (1) 66 (2) 36

102 B

1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 枚のカードがある. 次の条件を満たすように左から右に n 枚を並べる場合の数を $C(n)$ とする.

(条件) 1 から n までのすべての自然数 k について, 左から k 番目に番号 k のカードがこない.

(1) $C(4)$ を求めよ.

(2) $C(6)$ を求めよ.

(3) $n \geqq 3$ を満たす自然数 n に対して, $C(n+2) = (n+1)\{C(n) + C(n+1)\}$ が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{\text{102B}}$ (1) $C(4)=9$ (2) $C(6)=265$ (3) 略

2019 年度　FG　数学 IAIIB　【解答】１３講

$\boxed{97\text{A}}$　210

【解法】

$\boxed{98\text{A}}$　11

【解法】

$\boxed{99\text{A}}$　$n=9$

【解法】

$\boxed{100\text{B}}$　(1)　60　(2)　51

【解法】

$\boxed{101\text{B}}$　(1)　66　(2)　36

【解法】

$\boxed{102\text{B}}$　(1)　$C(4)=9$　(2)　$C(6)=265$　(3)　略

【解法】

103 C

(1) $n \geqq 2$，$1 \leqq k \leqq n-1$ のとき，等式 ${}_n\mathrm{C}_k = {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_k$ が成り立つことを証明せよ.

(2) 等式 $k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ が成り立つことを証明せよ.

(3) 自然数 n に対して，等式 ${}_n\mathrm{C}_1 + 2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + 3 \cdot {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + n \cdot {}_n\mathrm{C}_n = 2^{n-1} \cdot n$ が成り立つことを証明せよ.

104 C

自然数 n をそれより小さい自然数の和として表すことを考える．ただし，$1+2+1$ と $1+1+2$ のように和の順序が異なるものは別の表し方とする．例えば，自然数 2 は $1+1$ の 1 通りの表し方ができ，自然数 3 は，

$$2+1, \qquad 1+2, \qquad 1+1+1$$

の 3 通りの表し方ができる．2 以上の自然数 n の表し方は何通りか.

入試問題にチャレンジ (13)

$\left(x - \dfrac{x^2}{2} + y^2 - 2y^3\right)^{10}$ を展開して得られる x，y の多項式について，次数が 12 である項の係数の和を求めよ.

(2009・群馬大学)

第 8 章　二項定理

《学習項目》

・

A問題

〜〜

A 8 - 1

(1) ${}_n\mathrm{C}_r + {}_n\mathrm{C}_{r+1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$ を証明せよ。

(2) $k \cdot {}_n\mathrm{C}_k = n \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ を証明せよ。

A 8 - 2

次の式の展開式における，[　] 内に指定した項の係数を求めよ。

(1) $\left(x^3 + \dfrac{2}{x}\right)^7$ $[x^5]$

(2) $\left(2x^3 - \dfrac{1}{3x^2}\right)^5$ [定数項]

A 8 - 3

$(x - y + 3z)^5$ の展開式における xy^2z^2 の項の係数を求めよ。

A 8 - 4

次の式を簡単にせよ。

(1) ${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_r + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n$

(2) ${}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots\cdots + (-1)^r {}_n\mathrm{C}_r + \cdots\cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n$

B問題

B 8 - 1

次の式を簡単にせよ。

(1) ${}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + {}_{2n}\mathrm{C}_4 + \cdots\cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2r} + \cdots\cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$

(2) ${}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_3 + {}_{2n}\mathrm{C}_5 + \cdots\cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2r-1} + \cdots\cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$

B 8 - 2

${}_n\mathrm{C}_1 + 2{}_n\mathrm{C}_2 + 3{}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + n{}_n\mathrm{C}_n$ を計算せよ。

B 8 - 3

次の式を計算せよ。 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}$

C問題

C 8 - 1

二項定理を用いて，次の不等式が成り立つことを証明せよ。ただし，n は 2 以上の整数とする。

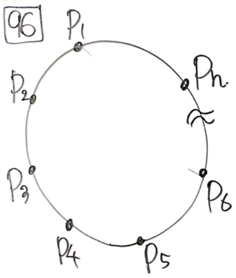
(1) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n > 2$

(2) $(1+x)^n \geqq 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2}x^2$ $(x>0)$

C-8-2 次の計算をせよ. (nの式で表せ)

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot {}_n\mathrm{C}_k$$

$\boxed{96}$



円周上のn個の点

a_n: 型　b_n: 型

弦は線分の一種

基本は流れ作業

$\boxed{a_n}$ まず三角形
↓
次に2①

$a_n = {}_nC_3 \times {}_3C_2$
$= \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$

$\boxed{b_n}$ まず四角形
↓
次に2①

$b_n = {}_nC_4 \times 2$
$= \frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3)$

$a_n = b_n$を解くと $n=9$

《補足》

弦は ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$

弦2本の組 ${}_{\frac{n(n-1)}{2}}C_2$

分割

$\boxed{97}$ 210　二項定理 ${}_9C_4$

$\boxed{98}$ 11　$(10+1)^{11} = \cdots\cdots$

$\boxed{99}$ $n=9$

$\boxed{100}$ (1) 60　(2) 51

二項定理　多項定理

$\boxed{101}$ (1) 66, (2) 36

生徒 14人から2人ずつの組をn組作る作り方

1〜7　区別なし

$S_n = {}_{14}C_2 \times {}_{12}C_2 \times \cdots \times {}_{14-2(n-1)}C_2 \div n!$

(n-1)組分

$= \frac{14\times13}{2}\times\frac{12\times11}{2}\times\cdots\times\frac{(14-2n)(13-2n)}{2}\div n!$

$= \frac{1}{2^n}\times 14\times13\times12\times\cdots\times(13-2n)\div n!$ ~~—(答)~~

$= \frac{1}{2^n n!}\times\frac{14\times13\times12\times\cdots\times(13-2n)\times(12-2n)\times\cdots\times3\times2\times1}{(12-2n)\times\cdots\times3\times2\times1}$

$= \frac{14!}{2^n\times n!\,(12-2n)!}$

(2) S_nが最大 ⇔ $n = \boxed{?}$

数列$\{S_n\}$の増減を考える

$S_n < S_{n+1}$ となる条件(増加)

差　$S_{n+1} - S_n > 0$　　比　$\frac{S_{n+1}}{S_n} > 1$

注 $S_n > 0$より

$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \left\{\frac{14!}{2^{n+1}\cdot(n+1)!\,(14-2(n+1))!}\right\} \Big/ \frac{14!}{2^n\cdot n!\,(14-2n)!}$

小　大

$= \frac{2^n\times n!\times(14-2n)!}{2^{n+1}\times(n+1)!\times(12-2n)!}$

$= \frac{(14-2n)(13-2n)}{2(n+1)} = \frac{(7-n)(13-2n)}{n+1}$

$= \frac{1}{2^n n!}\times\frac{14\times13\times12\times\cdots\times(15-2n)\times(14-2n)\times\cdots\times3\times2\times1}{(14-2n)\times\cdots\times3\times2\times1}$

$= \frac{14!}{2^n\times n!\,(14-2n)!}$

(2) S_nが最大 ⇔ $n = \boxed{?}$

数列$\{S_n\}$の増減を考える

$S_n < S_{n+1}$ となる条件(増加)

差　$S_{n+1} - S_n > 0$　　比　$\frac{S_{n+1}}{S_n} > 1$

注 $S_n > 0$より

$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \left\{\frac{14!}{2^{n+1}\cdot(n+1)!\,(14-2(n+1))!}\right\} \Big/ \frac{14!}{2^n\cdot n!\,(14-2n)!}$

小　大

増加 $S_{n+1} > S_n$

$= \frac{2^n\times n!\times(14-2n)!}{2^{n+1}\times(n+1)!\times(12-2n)!}$

$= \frac{(14-2n)(13-2n)}{2(n+1)} = \frac{(7-n)(13-2n)}{n+1}$

> 1より　$(7-n)(13-2n) > n+1$

$2n^2 - 28n + 90 > 0$

$n^2 - 14n + 45 > 0$

$(n-5)(n-9) > 0$

$n < 5$ より　$n = 1,2,3,4$

同様に $\frac{S_{n+1}}{S_n} = 1 \Leftrightarrow n = 5$　不変

$\frac{S_{n+1}}{S_n} < 1 \Leftrightarrow n = 6, 7$　減少

以上より

S_nが最大となるのは

$n = \boxed{5,6}$ のとき

$S_1\ S_2\ S_3 \cdots \boxed{S_5 = S_6}\ S_7$

増　不変　減少

$$▨ = {}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_{n-p-q}C_r$$

$$= \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{(n-p)!}{q! \times (n-p-q)!}$$

r

$$= \boxed{\frac{n!}{p!\,q!\,r!}}$$

二項定理

$(a+b)^n \Rightarrow$ 展開 $\boxed{{}_nC_k}\, a^k b^{n-k}$　　$\frac{n!}{k!(n-k)!}$

n個の因数のどこで
aをえらんで展開するか

⇔ aをk個, bを(n−k)個, 一列に並べる方法

$(k=0, 1, 2, \cdots, n)$

多項定理

$(a+b+c)^n \Rightarrow ▨\, a^p b^q c^r$

ただし $\begin{cases} p+q+r=n \\ 0 \leqq p, q, r \leqq n \end{cases}$ 整数

n個の因数のどこでaをp回, bをq回
cをr回えらんで展開するか.

⇔ aをp個, bをq個, cをr個
一列に並べる方法

《補足》

$\begin{cases} p+q+r=n \\ 0 \leqq p, q, r \leqq n \end{cases}$ をみたす非負整数

$\frac{(n+2)!}{n! \times 2!} = {}_{n+2}C_2$ 組

(p, q, r)の組数は

$(a+b+c)^n$ の展開式の $\boxed{\text{同類項の数}}$

を表す。

例1　$n=3$

$(a+b+c)^3 \Rightarrow a^3, b^3, c^3$
a^2b, ab^2, b^2c, bc^2
c^2a, ca^2, abc

$p+q+r=3$

${}_5C_2 = 10$

103 $\boxed{{}_nC_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}}$ を利用 $n! = n\times(n-1)!$, $10! = 10\times 9!$

(1) (右辺) $= {}_{n-1}C_{k-1} + {}_{n-1}C_k$

$= \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \dfrac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$

くくる

$= \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\dfrac{1}{n-k} + \dfrac{1}{k}\right)$ $\dfrac{n}{k(n-k)}$

$= \dfrac{n!}{k!(n-k)!} =$ (左辺) ■

《補足》 $\boxed{{}_nC_k = {}_{n-1}C_{k-1} + {}_{n-1}C_k}$

① Pascal の三角形に出現

② n人から k人えらぶ

特定の人が含まれるかどうか

好きな人はいますか？ 含まれる？

(2) (左辺) $= k\times {}_nC_k = k\times\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$

(右辺) $= n\times {}_{n-1}C_{k-1} = n\times\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$ ■

《補足》 $\boxed{k\times {}_nC_k = n\times {}_{n-1}C_{k-1}}$

リーダーつき組み合わせ キャプテン

(左辺)：${}_nC_k \times {}_kC_1$ 先レギュラー 後キャプテン

(右辺)：${}_nC_1 \times {}_{n-1}C_{k-1}$

先キャプテン 後レギュラー

$\boxed{{}_nC_k = {}_nC_{n-k}}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\times {}_nC_k = 2^{n-1}\cdot n$ を証明 —— ⊛

$(x+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\cdot x^k$ を利用

したいが kがじゃま

kが変わる
nは定まる

n 1減

(2) $k\times {}_nC_k = n\times {}_{n-1}C_{k-1}$ より

(⊛の左辺) $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} n\times {}_{n-1}C_{k-1} = n\cdot\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_{k-1}$

${}_{n-1}C_{△}$の和 ⇒ $(x+1)^{n-1}$ を利用

$(x+1)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k\, x^k$

$= \displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} {}_{n-1}C_l\, x^l$ ← $(l = k-1$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_{k-1}\, x^{k-1}$

$x=1$ 代入

$2^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_{k-1}$

より

(⊛の左辺) $= n\times\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_{k-1}$

$= n\times 2^{n-1}$

$=$ (⊛の右辺) ■

別証 (2)を用いずに

微分 を用いる