6/2 数学ゼミ
国立ぐみ

東邦二項定理.

和が□の倍数 ⇒ あまりで分類
Type分け.

積が□の倍数 ⇒ 素因数に着目

11講・補充-2

異なるn個のサイコロを投げる

(1) 積が2の倍数となるのは何通りか。

(2) 積が6の倍数となるのは何通りか。

(3) 積が4の倍数となるのは何通りか。

(4) 積が12の倍数

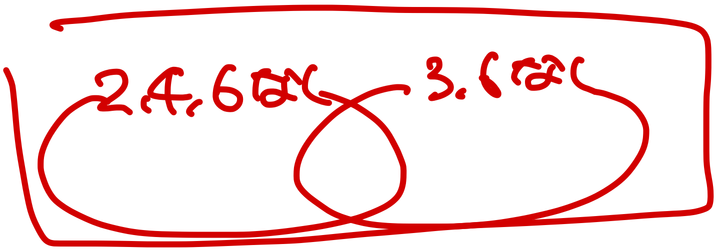
(1) 積が2の倍数

1〜n個

⇒ 2の倍数が少なくとも1個出る

$6^n - 3^n$

(2)



100 B

(1) $\left(2x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^6$ の展開式における定数項を求めよ．

(2) $(x^2 + x + 1)^5$ の展開式における x^5 の係数を求めよ．

$\boxed{\text{100B}}$　(1)　60　(2)　51

101 B

次の条件を満たす整数 x，y，z の組は何通りあるか．

(1) $x + y + z = 10$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$

(2) $x + y + z = 10$，$x > 0$，$y > 0$，$z > 0$

$\boxed{\text{101B}}$　(1)　66　(2)　36

102 B

1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 枚のカードがある．次の条件を満たすように左から右に n 枚を並べる場合の数を $C(n)$ とする．

(条件)　1 から n までのすべての自然数 k について，左から k 番目に番号 k のカードがこない．

(1) $C(4)$ を求めよ．

(2) $C(6)$ を求めよ．

(3) $n \geqq 3$ を満たす自然数 n に対して，$C(n+2) = (n+1)\{C(n) + C(n+1)\}$ が成り立つことを証明せよ．

$\boxed{\text{102B}}$　(1)　$C(4)=9$　(2)　$C(6)=265$　(3)　略

103 C

(1) $n \geqq 2$, $1 \leqq k \leqq n-1$ のとき，等式 ${}_n\mathrm{C}_k = {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_k$ が成り立つことを証明せよ.

(2) 等式 $k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ ($k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$) が成り立つことを証明せよ.

(3) 自然数 n に対して，等式 ${}_n\mathrm{C}_1 + 2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + 3 \cdot {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + n \cdot {}_n\mathrm{C}_n = 2^{n-1} \cdot n$ が成り立つことを証明せよ.

104 C

自然数 n をそれより小さい自然数の和として表すことを考える．ただし，$1+2+1$ と $1+1+2$ のように和の順序が異なるものは別の表し方とする．例えば，自然数 2 は $1+1$ の 1 通りの表し方ができ，自然数 3 は，

$$2+1, \qquad 1+2, \qquad 1+1+1$$

の 3 通りの表し方ができる．2 以上の自然数 n の表し方は何通りか.

入試問題にチャレンジ (13)

$\left(x - \dfrac{x^2}{2} + y^2 - 2y^3\right)^{10}$ を展開して得られる x，y の多項式について，次数が 12 である項の係数の和を求めよ.

(2009・群馬大学)

第 8 章　二項定理

《学習項目》

・

A問題

〜〜

A 8 - 1

⑴ ${}_n\mathrm{C}_r+{}_n\mathrm{C}_{r+1}={}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$ を証明せよ。

⑵ $k\cdot{}_n\mathrm{C}_k=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$を証明せよ。

A 8 - 2

次の式の展開式における，[　] 内に指定した項の係数を求めよ。

⑴ $\left(x^3+\dfrac{2}{x}\right)^7$ $[x^5]$

⑵ $\left(2x^3-\dfrac{1}{3x^2}\right)^5$ [定数項]

A 8 - 3

$(x-y+3z)^5$ の展開式における xy^2z^2 の項の係数を求めよ。

A 8 - 4

次の式を簡単にせよ。

⑴ ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_r+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n$

⑵ ${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots\cdots+(-1)^r{}_n\mathrm{C}_r+\cdots\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n$

B問題

B 8 - 1

次の式を簡単にせよ。

(1) ${}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_4+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2r}+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$

(2) ${}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+{}_{2n}\mathrm{C}_5+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2r-1}+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$

B 8 - 2

${}_n\mathrm{C}_1+2{}_n\mathrm{C}_2+3{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+n{}_n\mathrm{C}_n$を計算せよ。

B 8 - 3

次の式を計算せよ。　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}$

C問題

C 8 - 1

二項定理を用いて，次の不等式が成り立つことを証明せよ。ただし，n は 2 以上の整数とする。

(1) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n>2$

(2) $(1+x)^n\geqq 1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$ $(x>0)$

C-8-2 次の計算をせよ. (nの式で表せ)

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\cdot {}_n\mathrm{C}_k$

二項定理

$(a+b)^n$ を展開したときの一般項は，

$${}_n\mathrm{C}_k a^k b^{n-k}$$

ただし，k は $0 \leqq k \leqq n$ なる整数とする。

（注）$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^{n-k} b^k$ 　と表せる。

［例］$(a+b)^5$ を展開したときの，a^2b^3 の係数

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

$$\left.\begin{array}{l} aabbb = a^2b^3 \\ ababb = a^2b^3 \\ \quad\vdots \\ bbbaa = a^2b^3 \end{array}\right\} {}_5C_2 \text{ コ}$$

《補足》$a=x, b=1$ とおくと，

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot x^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot x^k$$

$$\therefore \quad (x+1)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + {}_n\mathrm{C}_3 x^3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} x^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n x^n$$

多項定理

$(a+b+c)^n$ を展開したときの一般項は，

$$\frac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!}a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$$

ただし，$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=n & \leftarrow \text{合計}n\text{乗} \\ 0\leqq\alpha,\ \beta,\ \gamma\leqq n & \leftarrow \text{ゼロ乗から}n\text{乗まで}\end{cases}$

【証明】

$$\begin{aligned}(a+b+c)^n &= \{a+(b+c)\}^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^k (b+c)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^k \left(\sum_{l=0}^{n-k} {}_{n-k}\mathrm{C}_l b^l c^{(n-k)-l}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{n-k} {}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_{n-k}\mathrm{C}_l \cdot a^k b^l c^{n-k-l}\right)\end{aligned}$$

ここで，$k=\alpha,\ l=\beta,\ n-k-l=\gamma$ とおくと，$0\leqq k\leqq n,\ 0\leqq l\leqq n-k$ より

$$\alpha+\beta+\gamma=n,\ 0\leqq\alpha,\beta,\gamma\leqq n$$

および，

$$a^k b^l c^{n-k-l} = a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$$

$${}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_{n-k}\mathrm{C}_l = \frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$$

が成り立つので，これで証明できたことになります。■

Ａ８・１　次の等式を証明せよ。

（１）　${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{r}$

（注）　${}_{n}\mathrm{C}_{r}=\dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$　，　${}_{n}\mathrm{P}_{r}=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

$$\boxed{n!=n\cdot(n-1)!}$$

${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r}$

$=\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\cdot\{(n-1)-(r-1)\}!}+\dfrac{(n-1)!}{r!\cdot\{(n-1)-r\}!}$

$=\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\cdot(n-r)!}+\dfrac{(n-1)!}{r!\cdot(n-r-1)!}$

$=\dfrac{r\cdot(n-1)!}{r!\cdot(n-r)!}+\dfrac{(n-r)\cdot(n-1)!}{r!\cdot(n-r)!}$　$\leftarrow (n-r)!=(n-r)\times(n-r-1)!$　，　$r!=r\times(r-1)!$

$=\dfrac{(n-1)!\cdot\{r+(n-r)\}}{r!\cdot(n-r)!}$

$=\dfrac{(n-1)!\cdot n}{r!\cdot(n-r)!}$

$=\dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$

$={}_{n}\mathrm{C}_{r}$ ■

Ａ８・４ 次の和を求めよ。

（１）$_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n$

（２）$_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^n\, {}_n\mathrm{C}_n$

［$_n\mathrm{C}_\blacktriangle$ の和⇒$(x+1)^n$ 利用］

二項定理より

$$(x+1)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1\, x + {}_n\mathrm{C}_2\, x^2 + {}_n\mathrm{C}_3\, x^3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}\, x^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n\, x^n \cdots（＊）$$

（＊）に $x=1$ を代入して

$$_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n = (1+1)^n = 2^n$$ …(1)の答

（＊）に $x=-1$ を代入して

$$_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + (-1)^{n-1}\, {}_n\mathrm{C}_{n-1} + (-1)^n\, {}_n\mathrm{C}_n = (-1+1)^n = 0$$

…(2)の答

Ｂ８・１ 次の和を求めよ。

（１） ${}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$

（２） ${}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+{}_{2n}\mathrm{C}_5+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$

［${}_{2n}\mathrm{C}_{\blacktriangle}$の和⇒$(x+1)^{2n}$利用］

二項定理より

$$(x+1)^{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_1\,x+{}_{2n}\mathrm{C}_2\,x^2+{}_{2n}\mathrm{C}_3\,x^3+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}\,x^{2n-1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}\,x^{2n}\cdots（＊）$$

（＊）に$x=1$を代入して

$${}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}=(1+1)^{2n}=2^{2n}\qquad\cdots①$$

（＊）に$x=-1$を代入して

$${}_{2n}\mathrm{C}_0-{}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_2-{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots-{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}=(-1+1)^{2n}=0\qquad\cdots②$$

（１）$_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$ を求める［偶数のみ］

$\{①+②\}\times\dfrac{1}{2}$　より［奇数を消去］

$_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}=\dfrac{1}{2}\times(2^{2n}+0)=\dfrac{1}{2}\times 2^{2n}=\mathbf{2^{2n-1}}\cdots$（答）

（２）$_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+{}_{2n}\mathrm{C}_5+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$ を求める［奇数のみ］

$\{①-②\}\times\dfrac{1}{2}$ より［偶数を消去］

$_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+{}_{2n}\mathrm{C}_5+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}=\dfrac{1}{2}\times(2^{2n}-0)=\dfrac{1}{2}\times 2^{2n}=\mathbf{2^{2n-1}}\cdots$（答）

Ｂ８・２次の和を求めよ。

（１）$1\cdot{}_n\mathrm{C}_1+2\cdot{}_n\mathrm{C}_2+3\cdot{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$

［${}_n\mathrm{C}_{\blacktriangle}$の和⇒$(x+1)^n$利用］

二項定理より

$(x+1)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+{}_n\mathrm{C}_3x^3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$ …（＊）

（１）

（＊）の両辺をxで微分して，

$$n\cdot(x+1)^{n-1}=0+{}_n\mathrm{C}_1\cdot1+{}_n\mathrm{C}_2\cdot2x+{}_n\mathrm{C}_3\cdot3x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\cdot nx^{n-1}$$

$x=1$を代入して，

$$n\cdot(1+1)^{n-1}=0+{}_n\mathrm{C}_1\cdot1+{}_n\mathrm{C}_2\cdot2\cdot1+{}_n\mathrm{C}_3\cdot3\cdot1^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\cdot n\cdot1^{n-1}$$

$$\therefore\quad 1\cdot{}_n\mathrm{C}_1+2\cdot{}_n\mathrm{C}_2+3\cdot{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+n\cdot{}_n\mathrm{C}_n=\underline{n\cdot2^{n-1}}$$

Ｂ８・３ 次の和を求めよ。

（２）$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_0}{1}+\dfrac{{}_n\mathrm{C}_1}{2}+\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{3}+\cdots+\dfrac{{}_n\mathrm{C}_n}{n+1}$

（２）

（＊）の両辺を $x=0$ から $x=1$ で定積分して，

$$\int_0^1 (x+1)^n dx$$
$$={}_n\mathrm{C}_0\int_0^1 dx+{}_n\mathrm{C}_1\int_0^1 xdx+{}_n\mathrm{C}_2\int_0^1 x^2dx+{}_n\mathrm{C}_3\int_0^1 x^3dx+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\int_0^1 x^ndx$$

$$\left[\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1={}_n\mathrm{C}_0\left[\frac{x^1}{1}\right]_0^1+{}_n\mathrm{C}_1\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+{}_n\mathrm{C}_2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+{}_n\mathrm{C}_3\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$\frac{2^{n+1}-1^{n+1}}{n+1}={}_n\mathrm{C}_0\cdot\frac{1}{1}+{}_n\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{2}+{}_n\mathrm{C}_2\cdot\frac{1}{3}+{}_n\mathrm{C}_3\cdot\frac{1}{4}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\cdot\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore\quad \frac{{}_n\mathrm{C}_0}{1}+\frac{{}_n\mathrm{C}_1}{2}+\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{3}+\cdots+\frac{{}_n\mathrm{C}_n}{n+1}=\underline{\frac{2^{n+1}-1}{n+1}}$$

A 8 − 1

(1) ${}_n\mathrm{C}_r + {}_n\mathrm{C}_{r+1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$ を証明せよ。

(2) $k \cdot {}_n\mathrm{C}_k = n \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$を証明せよ。

(1)　二項定理により

$$(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_r x^r + {}_n\mathrm{C}_{r+1} x^{r+1} + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n$$

よって，$(1+x)^n(1+x)$ の展開式における x^{r+1} の項の係数は

$${}_n\mathrm{C}_r + {}_n\mathrm{C}_{r+1}$$

また，二項定理により

$$(1+x)^{n+1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_0 + {}_{n+1}\mathrm{C}_1 x + \cdots\cdots + {}_{n+1}\mathrm{C}_r x^r + {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} x^{r+1} + \cdots\cdots + {}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1} x^{n+1}$$

ゆえに，$(1+x)^{n+1}$ の展開式における x^{r+1} の係数は

$${}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$$

$(1+x)^n(1+x) = (1+x)^{n+1}$ であるから，両辺の展開式における x^{r+1} の項の係数は等しい。

よって　　${}_n\mathrm{C}_r + {}_n\mathrm{C}_{r+1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$

過去問めぐり・北里の確率 談話室マロニエ

1 2011 北里大学

(2) n が $4 \leqq n \leqq 9$ を満たす自然数のとき，4 個の数字 1，2，3，n を用いて 4 桁の整数をつくる。

(ⅰ) $n=5$ のとき，3000 より小さい数は全部で $\boxed{(オ)}$ 個できる。

(ⅱ) 1 つの n に対して，1，2，3，n からつくられる 4 桁の整数のうち，2000 より小さい数の総和を S_n とするとき，S_n を n を用いて表わすと，$S_n=\boxed{(カ)}$ である。$S_n=8442$ となるときの n の値は $\boxed{(キ)}$ である。

2 2010 北里大学 1/30,選抜入試(１次) 医

(3) 赤，青，黄，緑のカードが 2 枚ずつ合計 8 枚ある。8 枚のカードから 4 枚を取り出し，左から順に並べるとき，

(ⅰ) 並べたものに緑のカードがない確率は $\boxed{(コ)}$ である。

(ⅱ) 並べたものが 2 色からなる確率は $\boxed{(サ)}$ である。

(ⅲ) 並べたものが 4 色からなる確率は $\boxed{(シ)}$ である。

(ⅳ) 同じ色のカードが隣り合わないように並ぶ確率は $\boxed{(ス)}$ である。

3 2009 北里大学 1/25,選抜入試(第１次) 医

(3) 6 個の箱があり，1 から 6 まで番号がついている。さいころを振り，出た目の数と同じ数のついた箱に球を 1 つ入れる。ただし，球は元に戻さない。これを 4 回繰り返す。

(ⅰ) 1 個の箱にだけ球が入る確率は $\boxed{(コ)}$ である。

(ⅱ) 番号 1 のついた箱と番号 2 のついた箱の両方に球が入り，他の箱には球が入らない確率は $\boxed{(サ)}$ である。

(ⅲ) 2 個の箱に 2 つずつ球が入る確率は $\boxed{(シ)}$ である。

(ⅳ) 4 個の箱に 1 つずつ球が入る確率は $\boxed{(ス)}$ である。

4　2008 北里大学 1/27, 第 1 次試験 医

(4)　表にダイヤ，スペード，ハート，クラブのマークが書かれた札がそれぞれ 3 枚ずつ計 12 枚ある。各マークの札には 1 から 3 までの数字が順に 1 つずつ表にふられている。これら 12 枚の札を裏返しにしてから，3 枚の札を無作為に取り出す。

（ i ）　3 枚がすべて同じマークになる確率は $\boxed{\text{(シ)}}$ である。

（ ii ）　3 枚がすべて同じ数字になる確率は $\boxed{\text{(ス)}}$ である。

（iii）　3 枚のマークがすべて異なる確率は $\boxed{\text{(セ)}}$ である。

（iv）　3 枚のマークがすべて異なり，かつ数字もすべて異なる確率は $\boxed{\text{(ソ)}}$ である。

5　2007 北里大学 1/28, 第 1 次試験 医

(3)　赤球，白球，黄球がそれぞれ 2 個，3 個，4 個入っている袋 A，3 個，4 個，2 個入っている袋 B，4 個，2 個，3 個入っている袋 C がある。A，B，C の袋から同時に 1 球ずつ取り出すとき，取り出された 3 球がすべて同じ色である確率は $\boxed{\text{(カ)}}$ である。また取り出された 3 球がすべて異なる色である確率は $\boxed{\text{(キ)}}$ である。

6　2006 北里大学 1/29, 第 1 次, 本学 医学部

(4)　A 氏，B 氏はそれぞれ 1 から 4 までの番号が 1 つずつ書いてある 4 枚のカードを持っている。1 枚ずつカードを出し合い，次の回には残りのカードから 1 枚ずつ出し合う。

（ i ）　1 回目にカードの番号が同じになる確率は $\boxed{\text{(セ)}}$ である。

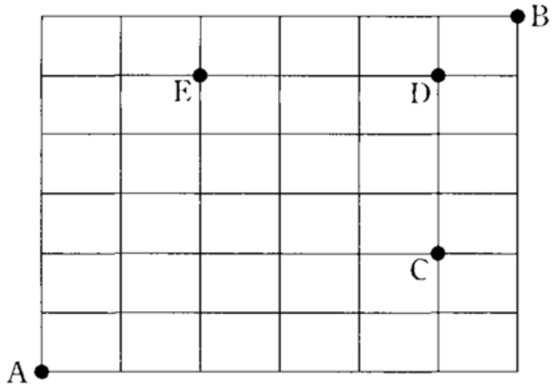
（ ii ）　2 回目に初めてカードの番号が同じになる確率は $\boxed{\text{(ソ)}}$ である。

（iii）　3 回目に初めてカードの番号が同じになる確率は $\boxed{\text{(タ)}}$ である。

（iv）　4 回目に初めてカードの番号が同じになる確率は $\boxed{\text{(チ)}}$ である。

7　2005 北里大学 1/23, 第 1 次試験, 本学 医学部

(4)　次図のように，縦 7 本，横 7 本の道がある。A 地点からB 地点まで最短経路を行くとする。



（i）　A からBまでの行き方は $\boxed{\text{(シ)}}$ 通りある。

（ii）（i）のうち，C を通る行き方は $\boxed{\text{(ス)}}$ 通りある。

（iii）（i）のうち，C，D，E のどの地点も通らない行き方は $\boxed{\text{(セ)}}$ 通りある。

8　2004 北里大学 1/25, 第 1 次試験, 本学 医学部

(4)　4 人でじゃんけんをして，負けた者から順にぬけてゆき，最後に残った 1 人を勝者とする。このとき，1 回のじゃんけんで 1 人の勝者が決まる確率は $\boxed{\text{(シ)}}$ である。1 回目終了後に 2 人が残っている確率は $\boxed{\text{(ス)}}$，4 人とも残っている確率は $\boxed{\text{(セ)}}$ である。また，2 回目のじゃんけんで 1 人の勝者が決まる確率は $\boxed{\text{(ソ)}}$ である。

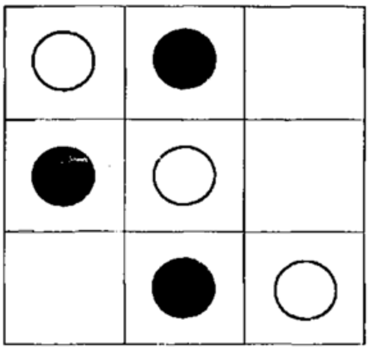
9　2003 北里大学 1/26,第 1 次試験,本学 医学部

(4)　縦 3 列，横 3 列，合計 9 つのますの中に黒石 3 つ，白石 3 つ，合計 6 つの石を置く。1 つのますの中には，石は 1 つしか置けない(下記図参照)。

（ⅰ）　6 つの石の置き方は全部で $\boxed{\text{(コ)}}$ 通りある。

（ⅱ）　黒石が縦または横の 1 列に並ぶ場合の総数は $\boxed{\text{(サ)}}$ である。

（ⅲ）　縦のどの列にも黒石と白石が置いてあり，かつ横のどの列にも黒石と白石が置いてある場合の総数は $\boxed{\text{(シ)}}$ である。



１０　2002 北里大学 1/27,第 1 次試験,本学 医学部

(3)　16 人の選手がいて，4 人ずつ赤，白，青，黄のユニフォームを着ている。同じ色のユニフォームを着ている 4 人はそれぞれ赤，白，青，黄の帽子をかぶっている。今 16 人の選手から 4 人を無作為に選び出す。

このとき，4 人が同じ色のユニフォームを着ている確率は $\boxed{\text{(ク)}}$，4 人のそれぞれが同じ色のユニフォームと帽子を身につけている確率は $\boxed{\text{(ケ)}}$ である。また，4 人のユニフォームの色が 2 色になる確率は $\boxed{\text{(コ)}}$ である。

１１　2001 北里大学 1/28,第 1 次試験,本学 医学部

(2)　6 個の箱があり，これらの箱には 1 から 6 までの番号がふられている。また，1 から 6 までの番号札があり，よくきったのち，それらを 1 枚ずつそれぞれの箱の中に入れる。このとき番号札の番号と箱の番号が一致する札の枚数を n とすると，$n=6$ となる確率は $\boxed{\text{(ウ)}}$，$n=4$ となる確率は $\boxed{\text{(エ)}}$，$n=2$ となる確率は $\boxed{\text{(オ)}}$ である。

【解答１】2011 北里大学 1/29,選抜入試(１次) 医

(2)

(ｉ) 12

(ⅱ) (ｶ) $7110+222n$ (ｷ) 6

【解答２】2010 北里大学 1/30,選抜入試(１次) 医

(3) (ｉ) $\dfrac{3}{14}$ (ⅱ) $\dfrac{3}{35}$ (ⅲ) $\dfrac{8}{35}$ (ⅳ) $\dfrac{3}{5}$

【解答３】2009 北里大学 1/25,選抜入試(第１次) 医

(3) (ｉ) $\dfrac{1}{216}$ (ⅱ) $\dfrac{7}{648}$ (ⅲ) $\dfrac{5}{72}$ (ⅳ) $\dfrac{5}{18}$

【解答４】2008 北里大学 1/27,第１次試験 医

(4) (ｉ) $\dfrac{1}{55}$ (ⅱ) $\dfrac{3}{55}$ (ⅲ) $\dfrac{27}{55}$ (ⅳ) $\dfrac{6}{55}$

【解答５】2007 北里大学 1/28,第１次試験 医

(3) (ｶ) $\dfrac{8}{81}$ (ｷ) $\dfrac{19}{81}$

【解答６】2006 北里大学 1/29,第１次,本学 医学部

(4) (ｾ) $\dfrac{1}{4}$ (ｿ) $\dfrac{1}{6}$ (ﾀ) $\dfrac{1}{8}$ (ﾁ) $\dfrac{1}{12}$

【解答７】2005 北里大学 1/23,第１次試験,本学 医学部

(4) (ｉ)(ｼ) 924

(ⅱ)(ｽ) 105

(ⅲ)(ｾ) 294

【解答８】2004 北里大学 1/25,第１次試験,本学 医学部

(4) (ｼ) $\dfrac{4}{27}$ (ｽ) $\dfrac{2}{9}$ (ｾ) $\dfrac{13}{27}$ (ｿ) $\dfrac{196}{729}$

【解答９】2003 北里大学 1/26,第１次試験,本学 医学部

(4) (ｺ) 1680 (ｻ) 120 (ｼ) 12

【解答１０】2002 北里大学 1/27,第１次試験,本学 医学部

(3) ク $\dfrac{1}{455}$, ケ $\dfrac{1}{1820}$, コ $\dfrac{102}{455}$

【解答１１】2001 北里大学 1/28,第１次試験,本学 医学部

(2) ウ $\dfrac{1}{720}$, エ $\dfrac{1}{48}$, オ $\dfrac{3}{16}$

「参考程度に…プロジェクタへのかきこみ」

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5

$\boxed{{}_5C_3+{}_5C_4={}_6C_4}$ 15

○

Pascalの三角形

$(x+1)^6=(x+1)^5\times(x+1)$

6

${}_6C_4\cdot x^4$

$(\cdots+{}_5C_3x^3+{}_5C_4\cdot x^4+\cdots)(x+1)$

$({}_5C_3+{}_5C_4)x^4$

B8・1 次の和を求めよ。

(1) ${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n}$ ← 右 偶のみ

(2) ${}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_5+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}$ ← 左 奇のみ

[${}_{2n}C_{\blacktriangle}$の和⇒$(x+1)^{2n}$利用]

二項定理より

$(x+1)^{2n}={}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1x+{}_{2n}C_2x^2+{}_{2n}C_3x^3+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}x^{2n-1}+{}_{2n}C_{2n}x^{2n}$ …(＊)

(＊)に$x=1$を代入して

${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_3+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}+{}_{2n}C_{2n}=(1+1)^{2n}=2^{2n}$ …①

和

(＊)に$x=-1$を代入して

${}_{2n}C_0-{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2-{}_{2n}C_3+\cdots-{}_{2n}C_{2n-1}+{}_{2n}C_{2n}=(-1+1)^{2n}=0$ …②

交代和

交代和

偶奇両方

C-8-2 $\sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot {}_nC_k = \boxed{?}$

$k \cdot {}_nC_k = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1}$

$\sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot {}_nC_k = 0 + 1^2 \cdot {}_nC_1 + 2^2 \cdot {}_nC_2 + 3^2 \cdot {}_nC_3 + \cdots + n^2 \cdot {}_nC_n$ を求める

(*) $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot x^k = {}_nC_0 + {}_nC_1 \cdot x + {}_nC_2 \cdot x^2 + {}_nC_3 \cdot x^3 + \cdots + {}_nC_n \cdot x^n$

微分派の人

$\sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot {}_nC_k = n \cdot 2^{n-2}(2+(n-1))$

$= n(n+1) \cdot 2^{n-2}$

$\sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot {}_nC_k$ を求める (*) $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot x^k$ さらに ビブン

(*)を ビブン $n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot k x^{k-1}$ 足りない $k(k-1){}_nC_k$

$\times x$ $nx(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot k x^{k}$ $k \cdot {}_nC_k$

2回目の ビブン

$n(x+1)^{n-1} + n(n-1)x(x+1)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot k^2 x^{k-1}$

$x=1$ 代入 $n \cdot 2^{n-1} + n(n-1) \cdot 2^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot k^2$

---

102 モンモール数, 完全順列, 撹乱順列

玉 ① ② … ⓝ

箱 1 2 n

玉と箱の番号が一致しない入れ方 $C(n)$ 通り 限界

$C(1)=0,\ C(2)=1,\ C(3)=\boxed{2},\ C(4)=\boxed{9}, \cdots$

$C(3) = \boxed{2}$: 2−3−1, 3−1−2

$C(4) = \boxed{9}$:
2 < 1−4−3, 3−4−1, 4−1−3
3 < 1−4−2, 4 < 1−2, 2−1

規則ムズイ

(3) $C(n+2) = (n+1) \cdot \{C(n) + C(n+1)\}$ を証明 モンモール型漸化式

$(n+2)$ 組の箱と玉からスタート

$C(n+2)$ 通り

1 … ? … n n+1 n+2

$(n+2)$ 番の箱に入っている玉を $(n+2)$ 番の玉と入れかえる

どの箱に $(n+2)$ が入っているか $= (n+1)$ 通り

1 2 … k … n+1 ~~n+2~~

n組だから $\boxed{C(n)\text{通り}}$

k … n+1 ~~n+2~~ kでない

$(n+1)$ 組だから $C(n+1)$ 通り

$\therefore C(n+2) = (n+1) \cdot \{C(n) + C(n+1)\}$

同じ色の玉は
区別ある・しない
$R_1 R_2 R_3 W_1 W_2$

$R_1 R_2 W_1 W_2$の円

14講 A,B $\boxed{\text{確率}}$

$\boxed{105}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{3}{4}$

$\boxed{106}$ $\frac{3}{5}$

$\boxed{107}$ 4 6

順番keep 復

$\boxed{108}$ $\frac{1}{3}$

$\boxed{109}$ $\frac{3}{14}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{43}{63}$

$\boxed{110}$ $\frac{8}{27}$ $\frac{61}{216}$

110 最大最小 ⇨ 確率のくりぬき → 111

3個のサイコロを同時に振る

区別あり　　→ 順番に振っても同じ

(1) すべて4以下 $= \left(\dfrac{4}{6}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$

1,2,3,4

Max≦4

(2) $(\mathrm{Max}=5) = (\mathrm{Max}\leqq 5) - (\mathrm{Max}\leqq 4)$

$$= \frac{5^3-4^3}{6^3} = \frac{61}{216}$$

修正　　　$* = 1,2,3,4$

5の出る回数で場合分け

5 * *	${}_3C_1 \times 4^2$
5 5 *	${}_3C_2 \times 4^1$
5 5 5	${}_3C_3$ (+
	61

$$\therefore \frac{48+12+1}{6^3} = \frac{61}{216}$$

誤答例

(2) 最大値=5 の確率

1回目	2回目	3回目

551 蓬来 ぶたまん

どれかが5の目　　${}_3C_1$

他の目は 1〜5のいずれか　5^2

$$\therefore \cancel{\frac{{}_3C_1\times 5^2}{6^3} = \frac{75}{216}}$$ まちがい

5	5	1

5　5　1

ダブルカウント

「特別視．リーダー化」によるまちがい