5/22 数学ゼミ

私立1組

183 C

多項式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると余りが 5，$(x+2)^2$ で割ると余りが $-23x-35$ である．このとき，$f(x)$ を $(x-1)(x+2)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

184 C

1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とするとき，

$$\omega^{2n}+\omega^n+1$$

の値を求めよ．ただし，n は自然数とする．

入試問題にチャレンジ (23)

多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ は多項式 x^2+x+1 で割り切れるか．

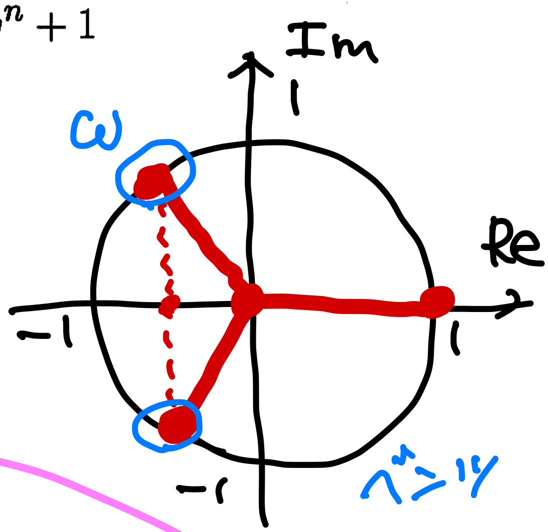
(2003・京都大学)

公式わすれた…

1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とするとき，

$$\omega^{2n}+\omega^{n}+1$$

の値を求めよ．ただし，n は自然数とする．



答 $\begin{cases} 3 & (n:\ 3\text{の倍数}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$

[解] $x^3=1$ より

$x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1$ または $x^2+x+1=0$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\omega$

$\therefore\ \boxed{\omega^3=1,\quad \omega^2+\omega+1=0}$

数列 $\{\omega^n\}$ は，周期 3 をもつ

⇒ n を 3 でわったあまりで場合分け

(i) $n=3k$ のとき　$\omega^3=1$　(k：整数)

$(\text{与式})=\omega^{6k}+\omega^{3k}+1=3$

$\omega^3=1$

(ii) $n=3k+1$ のとき

$(\text{与式})=\omega^{6k+2}+\omega^{3k+1}+1=\omega^2+\omega+1=0$

$\omega^4=\omega^1$

(iii) $n=3k+2$ のとき

$(\text{与式})=\omega^{6k+4}+\omega^{3k+2}+1=\omega+\omega^2+1=0$

(別解) $a_n = \omega^{2n} + \omega^n + 1$ とおく

具体化.

$a_1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0$

$a_2 = \underset{\omega^1}{\underset{\shortparallel}{\omega^4}} + \omega^2 + 1 = 0$

$a_3 = \omega^6 + \omega^3 + 1 = 3$

⋮

$\therefore a_n = \begin{cases} 3 & (n:3の倍数) \\ 0 & (それ以外) \end{cases}$

⇩ 記述式だと減点されそう

数列 $\{a_n\}$ が周期 3 をもつことを証明

つまり $a_{n+3} = a_n$

$a_{n+3} - a_n = (\omega^{2n+6} + \omega^{n+3} + \cancel{1}) - (\omega^{2n} + \omega^n + \cancel{1})$

$= \omega^{2n}(\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\omega^6 - 1}}) + \omega^n(\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\omega^3 - 1}})$

$= 0$

$\therefore a_{n+3} = a_n$

よって $a_n = \begin{cases} 3 & (n:3の倍数) \\ 0 & (それ以外) \end{cases}$

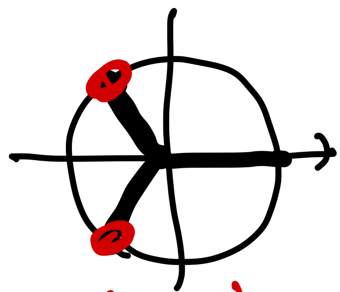
入試問題にチャレンジ (23)

答 割り切れる.

多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ は多項式 x^2+x+1 で割り切れるか.

(2003・京都大学)

次数 10000



$\boxed{x^2+x+1 \Longrightarrow 1\text{の3乗根}}$

$x^2+x+1=0$ の解を ω とおく.

$$\omega=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)$$

より $\boxed{\omega^3=1}$, $\omega^2+\omega+1=0$

注 1の3乗根に気づかなければ

$$\omega^3=\omega\times\omega^2=\omega(-\omega-1)=-\omega^2-\omega=1$$

$f(x)=(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ とおく.

$$\left[=(x^2+x+1)Q(x)+\boxed{?}\right]$$

$px+q$ とおくとよい

ω 代入でゼロ

$$f(\omega)=(\underbrace{\omega^{100}+1}_{\omega+1=-\omega^2})^{100}+(\underbrace{\omega^2+1}_{=-\omega})^{100}+1$$

単項式に

$$=\omega^{200}+\omega^{100}+1 \leftarrow \left(\begin{aligned}\omega^{198}&=1\\ \omega^{99}&=1\end{aligned}\right)$$

$$=\omega^2+\omega+1$$

$$=0$$

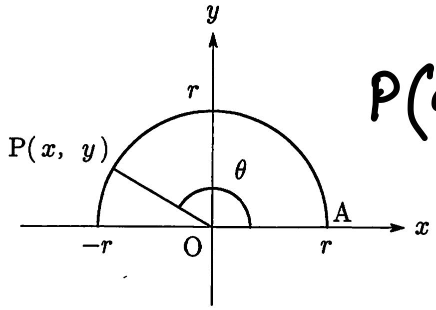
よって $f(x)$ は x^2+x+1 で割り切れる //

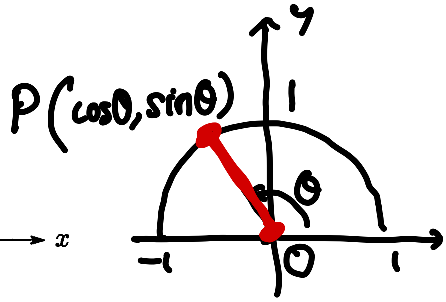
第7講　I　三角比(1)

半径 r 派　v.s.　1 派.

[1] 三角比の定義

O を原点とする座標平面上で A$(r,\ 0)$ $(r>0)$ とし，半円周 $x^2+y^2=r^2$ $(y \geqq 0)$ 上にある点 P$(x,\ y)$ を考える。





$\angle \mathrm{POA}=\theta$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とするとき，

(r=1)　$$\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

と定義する．$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ をそれぞれ θ の**正弦**，**余弦**，**正接**という．

[2] 三角比の相互関係

$$①\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad ②\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\quad ③\ 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

÷ $\cos^2\theta$

(証) 二点間距離公式
[三平方の定理]

[3] $90^\circ-\theta$ の三角比

$$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$$
$$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$$
$$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$$

[4] $180^\circ-\theta$ の三角比

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta$$

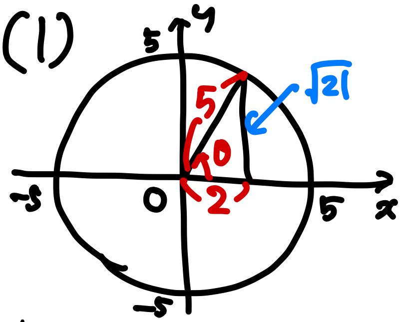
49 A (1) $\sin\theta = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{21}}{2}$ (2) $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする. 公式派 v.s 定義派

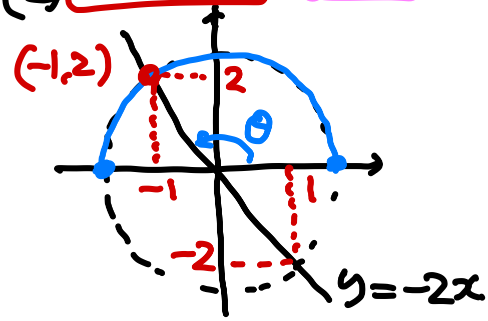
(1) $\cos\theta = \frac{2}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ. $r=5$

(2) $\tan\theta = -2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値をそれぞれ求めよ.

(1)



(2) $\boxed{\tan = -2}$ $r=\sqrt{5}$



50 A

次の式を簡単にせよ.

0=(1) $\sin(90^\circ - \theta) + \sin(180^\circ - \theta) - \cos(90^\circ - \theta) + \cos(180^\circ - \theta)$

1=(2) $\sin 10^\circ \cos 80^\circ - \sin 100^\circ \cos 170^\circ$

公式，円を描く. (加法定理)

$\cos 80^\circ = \cos(90^\circ - 10^\circ) = \cos 90^\circ \cdot \cos 10^\circ + \sin 90^\circ \cdot \sin 10^\circ$

$= \sin 10^\circ$

$\sin 100^\circ = \sin(90^\circ + 10^\circ)$ or $\sin(180^\circ - 80^\circ)$

51 A

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の方程式を解け.

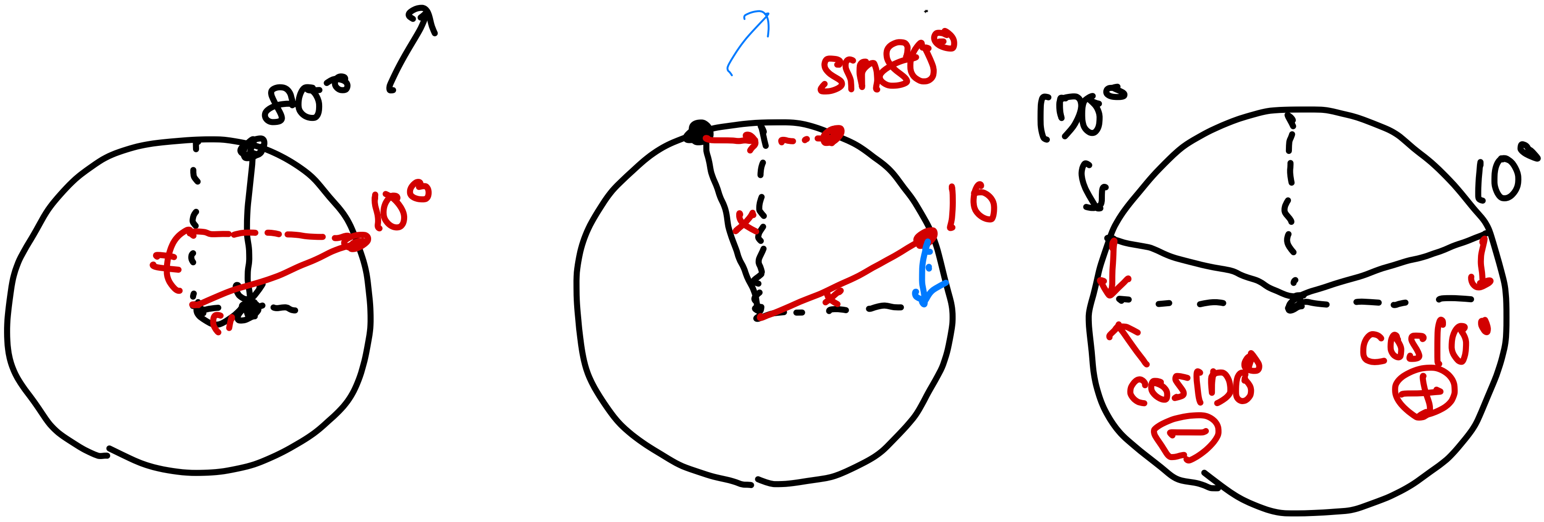
(1) $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\theta = -\sqrt{3}$

(2)

$$\sin 10^\circ \overset{\sin 10^\circ}{\cos 80^\circ} - \overset{\cos 10^\circ}{\sin 100^\circ}\ \overset{-\cos 10^\circ}{\cos 170^\circ}$$



$$(\text{与式}) = \sin 10^\circ \times \sin 10^\circ - \cos 10^\circ \times (-\cos 10^\circ)$$

$$= \sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ = \underline{1}$$

$\boxed{4\ 9\,\mathrm{A}}$　(1)　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$,　$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$　(2)　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,　$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

【解法】三角関数の相互関係 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\boxed{5\ 0\,\mathrm{A}}$　(1)　0　(2)　1

【解法】三角関数の変換公式　$90°-\theta, 180°-\theta$

$\boxed{5\ 1\,\mathrm{A}}$　(1)　$\theta=45°$,　$135°$　(2)　$\theta=150°$　(3)　$\theta=120°$

【解法】三角関数の方程式

52 B

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

~~(1)~~ $\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{23}{17}$ のとき，$\sin\theta$ の値を求めよ．

(3) $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(複号同順)

(1) $\cos\theta = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\theta = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (2) $\sin\theta = \dfrac{8}{17}$，$\dfrac{5}{17}$

(3) $\tan\theta = \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$s^2+c^2=1$ 利用

53 B

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の方程式を解け．

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

(2) $2\cos^2\theta = 1$

(3) $\tan^2\theta - (\sqrt{3}-1)\tan\theta - \sqrt{3} = 0$

$\boxed{53\text{B}}$ (1) $\theta = 30^\circ$，150° (2) $\theta = 45^\circ$，135° (3) $\theta = 60^\circ$，135°

【解法】三角関数の方程式

54 B

$A+B+C=\pi$ を利用

三角形 ABC の ∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C とするとき，

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

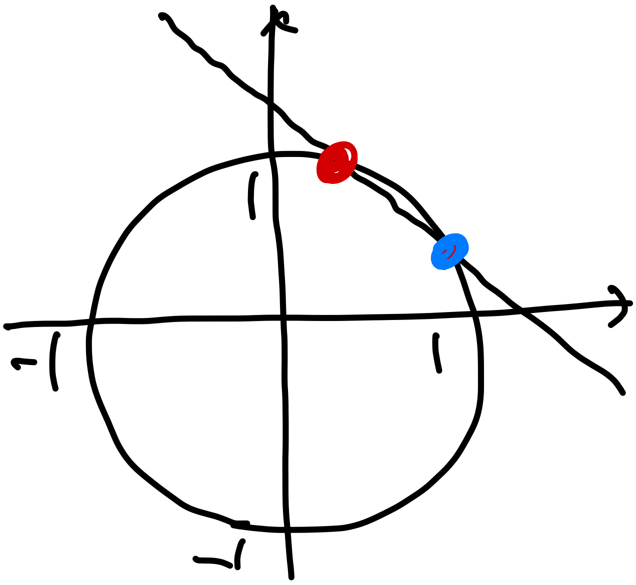
が成り立つことを示せ．

(2) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{23}{17}$

$\sin\theta=y$, $\cos\theta=x$ とおくと

$x^2+y^2=1$, $x+y=\frac{23}{17}$

円と直線とみなせる



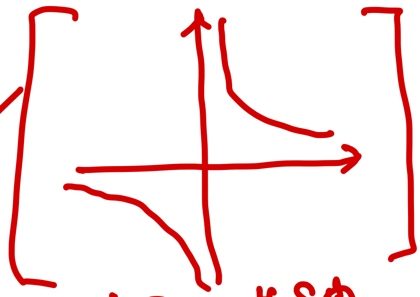
連立すると

$(x,y)=\left(\frac{8}{17},\frac{15}{17}\right),\left(\frac{15}{17},\frac{8}{17}\right)$

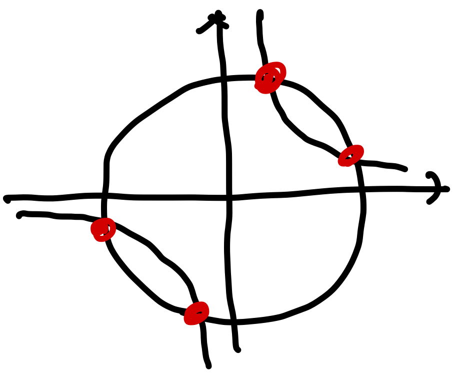
(3) $\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{1}{3}$. のとき $\tan\theta=\boxed{?}$

$y=\sin\theta$. $x=\cos\theta$ とおくと

$x^2+y^2=1$. $xy=\frac{1}{3}$



直角双曲線



図形的に解いてもよいが…

$$\boxed{\sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta}$$

$$\begin{cases} t = \frac{s}{c} \\ 1 + t^2 = \frac{1}{c^2} \end{cases}$$

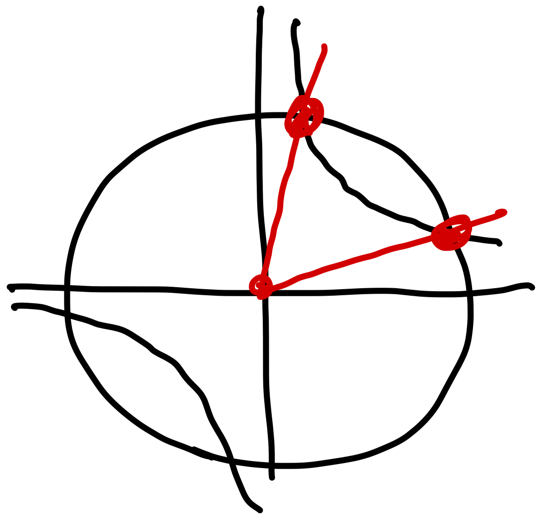
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \cos^2\theta = \frac{1}{3}$$

$$\tan\theta \times \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{3}$$

$$3\tan\theta = 1 + \tan^2\theta$$

$$\tan^2\theta - 3\tan\theta + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$



2019 年度　FG　数学 IAIIB　【解答】7 講

$\boxed{49A}$ (1)　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$,　$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$　(2)　$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,　$\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

【解法】三角関数の相互関係 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\boxed{50A}$ (1)　0　(2)　1

【解法】三角関数の変換公式　$90° - \theta, 180° - \theta$

$\boxed{51A}$ (1)　$\theta = 45°$，$135°$　(2)　$\theta = 150°$　(3)　$\theta = 120°$

【解法】三角関数の方程式

$\boxed{52B}$ (1)　$\cos\theta = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,　$\tan\theta = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(2)　$\sin\theta = \dfrac{8}{17}$,　$\dfrac{5}{17}$

(3)　$\tan\theta = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

【解法】三角関数の相互関係

$\boxed{53B}$ (1)　$\theta = 30°$，$150°$　(2)　$\theta = 45°$，$135°$　(3)　$\theta = 60°$，$135°$

【解法】三角関数の方程式

$\boxed{54B}$ 方針：$A + B + C = 180°$ を利用，変換公式へ。

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

$A+B+C=\pi$ より

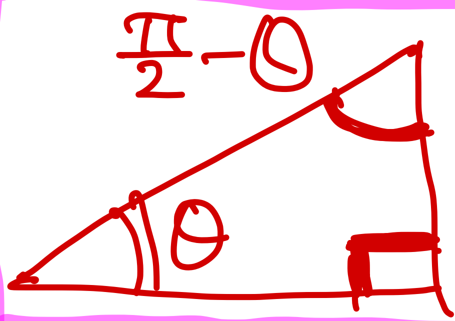
$$\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}.$$

$$\sin\frac{B+C}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$$

$$\cos\frac{B+C}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$$

よって (左辺) $=\sin\frac{A}{2}\times\cos\frac{A}{2}$

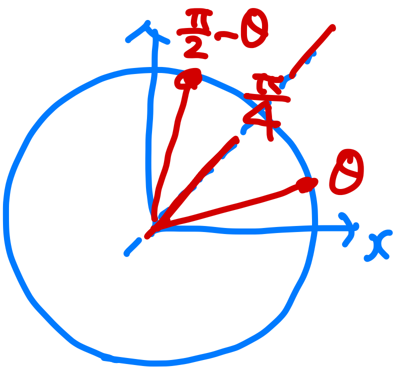
(右辺) $=\cos\frac{A}{2}\times\sin\frac{A}{2}$ より成立 ■



$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

角 $\frac{\pi}{2}-\theta$ ⇒ $\sin\theta$, $\cos\theta$ の入れかえ



$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}}$$

55 C

$0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$ とする．$\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = 9$ のとき，$\sin\theta - \cos\theta$ の値を求めよ．

56 C

正五角形ABCDEにおいて，対角線ACとBEの交点をF，対角線ADとBEの交点をGとする．

(1) 三角形ABGと三角形GAFは相似であることを証明せよ．

(2) $\mathrm{BF} = 1$ のとき，辺ABの長さを求めよ．

(3) $\cos 36^\circ$ の値を求めよ．

入試問題にチャレンジ (7)

$0^\circ < \theta < 45^\circ$ のとき，縦と横の長さがそれぞれ $\sin\theta$，$\cos\theta$ の長方形がある．この長方形を半分に折ってできる長方形がもとの長方形と相似であるとき，もとの長方形の面積はいくらか．また，もとの長方形の縦と横の長さの比はいくらか．

(2000・藤田保健衛生大学)

第８講　　三角比(2)

三角形 ABC の辺の長さを BC = a，CA = b，AB = c とする．また，∠A = A，∠B = B，∠C = C とする．

1 **正弦定理**　証　円周角の定理

三角形 ABC の外接円の半径を R とすると，

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

2 **余弦定理**　証　三平方の定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

3 **鋭角三角形・直角三角形・鈍角三角形**

「A が鋭角」 $\iff$ $\cos A > 0$ $\iff$ $b^2 + c^2 > a^2$

「A が直角」 $\iff$ $\cos A = 0$ $\iff$ $b^2 + c^2 = a^2$ ← 限界状況

「A が鈍角」 $\iff$ $\cos A < 0$ $\iff$ $b^2 + c^2 < a^2$

余弦定理　三平方の定理

4 **三角形の成立条件**

3 つの正の数 a，b，c に対して，これを 3 辺の長さとする三角形が存在するための条件は，

$$b + c > a \text{ かつ } c + a > b \text{ かつ } a + b > c$$

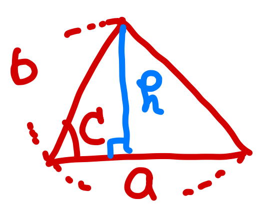
5 **角の大小と辺の長さの大小**

$$A > B \iff \cos A < \cos B \iff a > b$$

6 **三角形の面積**

三角形 ABC の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}\underbrace{ab\sin C}_{h}$$



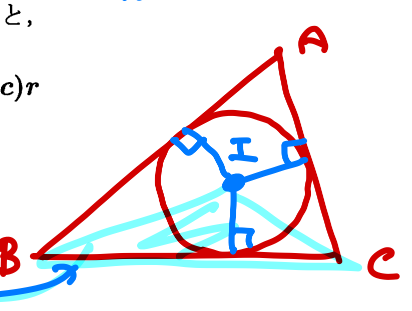
$\frac{1}{2}$×底辺×高さ

7 **内接円の半径と面積の関係**

三角形 ABC の面積を S，内接円の半径を r とすると，

$$S = \frac{1}{2}(a + b + c)r$$

$\frac{1}{2}ar$



57 A

(1) 三角形 ABC において，$BC=\sqrt{2}$，$\angle A=45^\circ$，$\angle B=60^\circ$ とする．このとき，辺 CA の長さおよび三角形 ABC の外接円の半径を求めよ．

$\boxed{5\ 7\mathrm{A}}$ (1)　$\mathrm{CA}=\sqrt{3}$, $R=1$　(2)　$\mathrm{BC}=7$, $S=10\sqrt{3}$

【解法】正弦定理，余弦定理，△の面積公式

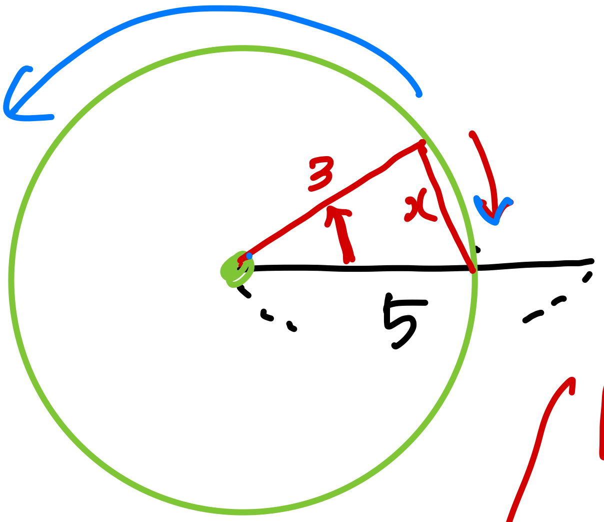
(2) 三角形 ABC において，$AB=8$，$AC=5$，$\angle A=60^\circ$ とする．このとき，辺 BC の長さおよび三角形 ABC の面積を求めよ．

59 A　(1) 三角形の成立条件　(2) 鋭角・鈍角の判定.

3 辺の長さが 3，5，x の三角形 T がある．

(1)　x のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　T が鈍角三角形となるような x の値の範囲を求めよ．



(1) 図形的に

$\boxed{2} < x < \boxed{8}$

差　和

三角形の成立条件

正の数 a, b, c を三辺の長さとする △ が存在

⇕

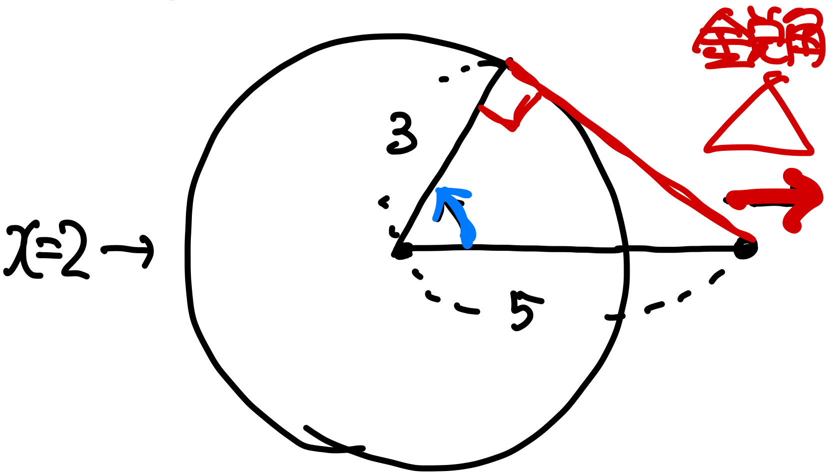
$$\begin{cases} a < b+c \\ b < c+a & \Leftrightarrow \quad b-c < a \\ c < a+b & \Leftrightarrow \quad c-b < a \end{cases}$$

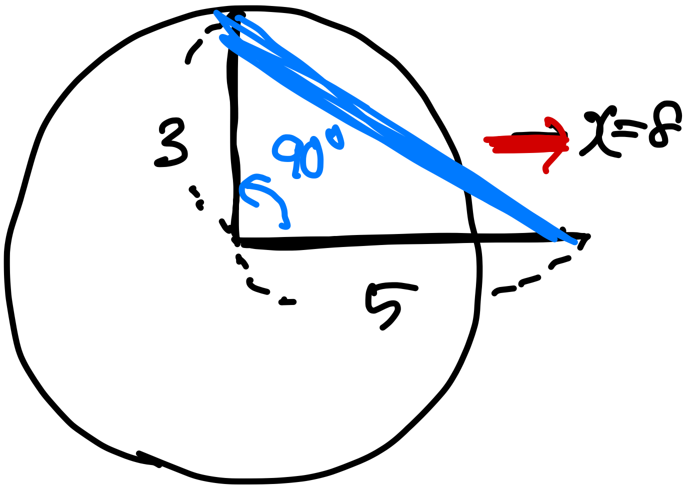
⇕

$\therefore \ |b-c| < a < b+c$

差　和

(2) 限界状況 = 直角三角形

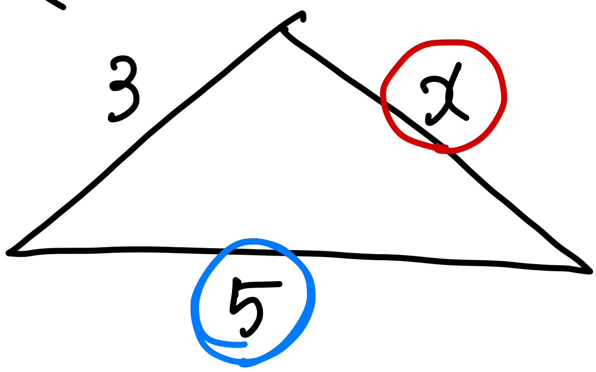




$2 < x < \boxed{4}$

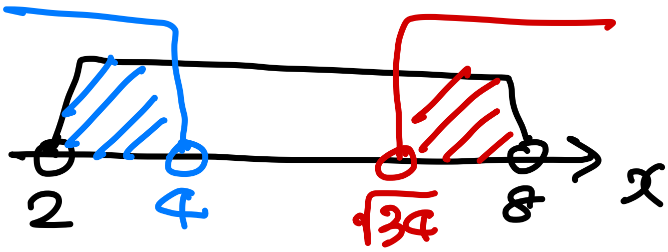
$\boxed{\sqrt{34}} < x < 8$ //

(2)



(1)より $2<x<8$ のもとで

$$\begin{cases} x^2 > 3^2+5^2 \iff x>\sqrt{34} \\ \text{または} \\ 5^2 > 3^2+x^2 \iff x<4 \end{cases}$$



$2<x<4,\ \sqrt{34}<x<8$ //

$\boxed{58}$ (1) $a\sin A + b\sin B = c\cdot\sin C$

(2) $a\cdot\cos A = b\cdot\cos B$

$\boxed{58\text{A}}$ (1) ∠C＝90° の直角三角形 (2) $a=b$ の二等辺三角形または∠C＝90° の直角三角形

【解法】三角形の形状決定問題＝正弦・余弦定理で辺だけの式にする。

$$a\underbrace{\sin A}_{=\frac{a}{2R}} + b\underbrace{\sin B}_{=\frac{b}{2R}} = c\cdot\underbrace{\sin C}_{=\frac{c}{2R}}$$

正弦

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \cdots = 2R}$$

$a^2+b^2=c^2$ ∴ Cが斜辺の直角△

$\boxed{5\ 7\mathrm{A}}$　(1)　$\mathrm{CA}=\sqrt{3},\ R=1$　(2)　$\mathrm{BC}=7, S=10\sqrt{3}$

【解法】正弦定理，余弦定理，△の面積公式

$\boxed{5\ 8\mathrm{A}}$　(1)　$\angle\mathrm{C}=90^\circ$ の直角三角形　(2)　$a=b$ の二等辺三角形または$\angle\mathrm{C}=90^\circ$ の直角三角形

【解法】三角形の形状決定問題＝正弦・余弦定理で辺だけの式にする。

$\boxed{5\ 9\mathrm{A}}$　(1)　$2<x<8$　(2)　$2<x<4, \sqrt{34}<x<8$

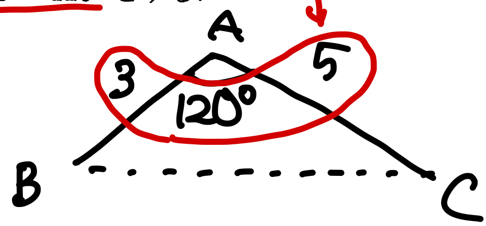
【解法】(1)三角形の成立条件　　正の数a,b,cを三辺に持つ三角形が存在　⇔　$|b-c|<a<b+c$

(2)鋭角・鈍角の判定　＝　三平方　あるいは　余弦定理からの類推

60 B

二辺夾角

三角形 ABC において，AB = 3，AC = 5，∠BAC = 120° とする．



(1) 辺 BC の長さを求めよ．

(2) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(3) 三角形 ABC の内接円の半径を求めよ．

$\boxed{\text{６０B}}$ (1) $BC = 7$ (2) $S = \dfrac{15\sqrt{3}}{4}$ (3) $r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解法】余弦，面積，内接円半径

$S = \frac{1}{2}(a+b+c)r$

61 B

三角形 ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C = 6 : 5 : 4$ とする．

(1) $\cos A$，$\sin A$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 三角形 ABC の面積が $\dfrac{15\sqrt{7}}{7}$ のとき，三角形 ABC の外接円の半径を求めよ．

$\boxed{\text{６１B}}$ (1) $\cos A = \dfrac{1}{8}$，$\sin A = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$ (2) $R = \dfrac{16}{7}$

【解法】(1)正弦から辺の比，余弦から cos，相互関係から sin，
(2)面積から辺そのもの，正弦から外接円半径

62 B

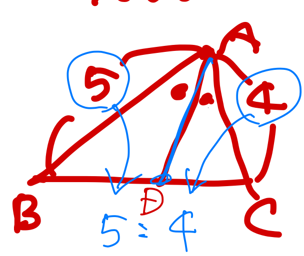
有名角

三角形 ABC において，AB = 5，AC = 4，∠A = 60° とする．さらに，∠A の二等分線が辺 BC と交わる点を D，三角形 ABC の内接円の中心を I とする．

内心

(1) 線分 AD の長さを求めよ．

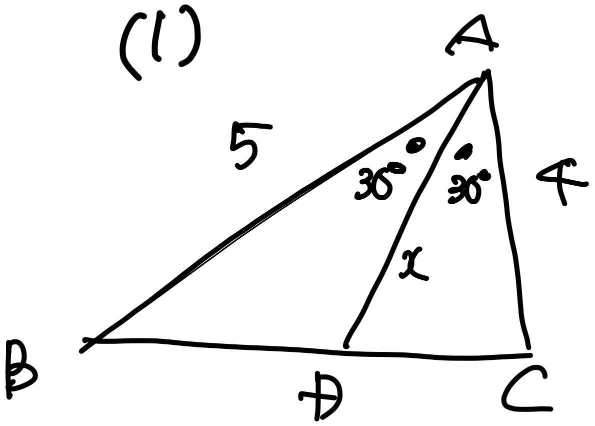
(2) 線分 DI の長さを求めよ．



$\boxed{\text{６２B}}$ (1) $AD = \dfrac{20\sqrt{3}}{9}$ (2) $DI = \sqrt{7} - \dfrac{7\sqrt{3}}{9}$

【解法】(1)面積利用 or 余弦定理（計算量多い），(2)T&E

(1)



$x = AD$ とおく

$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$

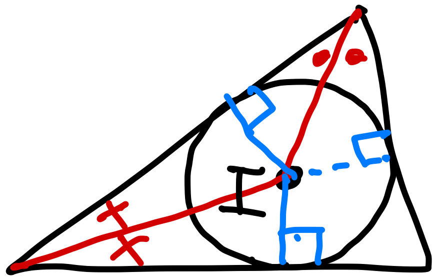
$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \overbrace{\sin 60^\circ}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

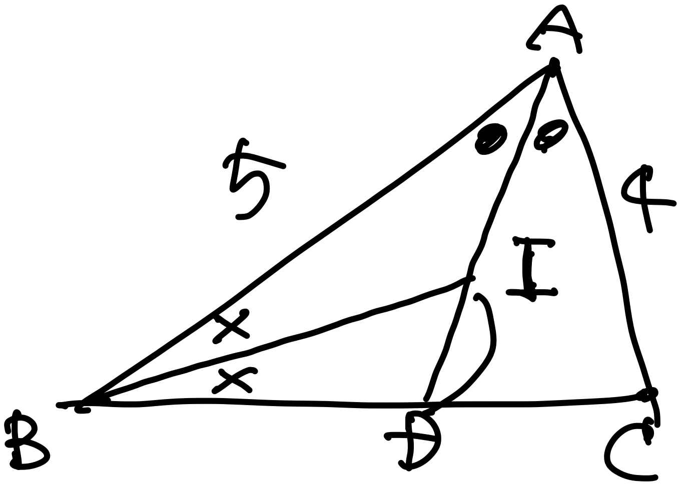
$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot x \cdot \underbrace{\sin 30^\circ}_{=\frac{1}{2}} + \frac{1}{5} \cdot 4 \cdot x \cdot \underbrace{\sin 30^\circ}_{=\frac{1}{2}}$$

$$AD = x = \frac{20\sqrt{3}}{9}$$

(2) 内接円中心（内心）

＝内角の二等分線の交点…





角の二等分線の性質より

$$AI : ID = AB : BD$$

$$BD = \frac{5}{5+4}\boxed{BC} = \frac{5\sqrt{21}}{9}$$

余弦 $\sqrt{21}$

$$y^2 = 5^2 + 4^2 - 2\cdot 5\cdot 4\cdot \cos 60^\circ$$

(1)より $\frac{20\sqrt{3}}{9}$

$$DI = \frac{\frac{5\sqrt{21}}{9}}{5 + \frac{5\sqrt{21}}{9}} \times AD$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{9+\sqrt{21}} \times \frac{20\sqrt{3}}{9}$$

$$= \underset{\text{有理化}}{\cdots} = \sqrt{7} - \frac{7\sqrt{3}}{9}$$

61 正弦定理.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\quad(=2R)$$

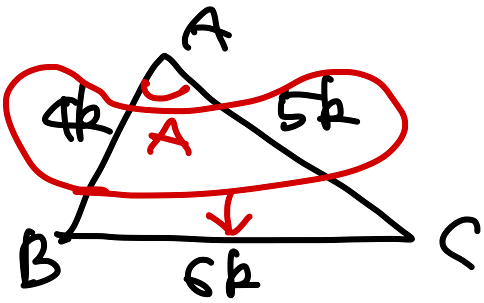
$\Rightarrow\ a:b:c = \sin A:\sin B:\sin C$

$\sin A:\sin B:\sin C = 6:5:4$ より

$a:b:c=6:5:4$

よって $a=6k,\ b=5k,\ c=4k\ (k>0)$ と表せる

(1)



余弦より

$$(6k)^2=(5k)^2+(4k)^2-2\cdot5k\cdot4k\cdot\cos A$$

$$\cos A=\frac{1}{8}$$

$$\sin A=\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

---

(2) $S=\frac{1}{2}\times4k\times5k\times\sin A=\frac{15\sqrt{7}}{4}k^2=\frac{15\sqrt{7}}{7}$

$\therefore k^2=\frac{4}{7}\qquad k=\frac{2}{\sqrt{7}}$

より $a=\frac{12}{\sqrt{7}}$

$\frac{a}{\sin A}=2R$ に代入

$$R=\frac{16}{7}$$

2019年度　FG　数学IAIIB　【解答】8講

$\boxed{5\ 7\mathrm{A}}$　(1)　$\mathrm{CA}=\sqrt{3}$，$R=1$　(2)　$\mathrm{BC}=7, S=10\sqrt{3}$

【解法】正弦定理，余弦定理，△の面積公式

$\boxed{5\ 8\mathrm{A}}$　(1)　$\angle\mathrm{C}=90^\circ$ の直角三角形　(2)　$a=b$ の二等辺三角形または$\angle\mathrm{C}=90^\circ$ の直角三角形

【解法】三角形の形状決定問題＝正弦・余弦定理で辺だけの式にする。

$\boxed{5\ 9\mathrm{A}}$　(1)　$2<x<8$　(2)　$2<x<4, \sqrt{34}<x<8$

【解法】(1)三角形の成立条件　　正の数a,b,cを三辺に持つ三角形が存在　⇔　$|b-c|<a<b+c$

(2)鋭角・鈍角の判定　＝　三平方　あるいは　余弦定理からの類推

$\boxed{6\ 0\mathrm{B}}$　(1)　$\mathrm{BC}=7$　(2)　$S=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$　(3)　$r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解法】余弦，面積，内接円半径

$\boxed{6\ 1\mathrm{B}}$　(1)　$\cos A=\dfrac{1}{8}$, $\sin A=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$　(2)　$R=\dfrac{16}{7}$

【解法】(1)正弦から辺の比，余弦からcos，相互関係からsin，

(2)面積から辺そのもの，正弦から外接円半径

$\boxed{6\ 2\mathrm{B}}$　(1)　$\mathrm{AD}=\dfrac{20\sqrt{3}}{9}$　(2)　$\mathrm{DI}=\sqrt{7}-\dfrac{7\sqrt{3}}{9}$

【解法】(1)面積利用　or 余弦定理（計算量多い），(2)T&E

63 C

三角形ABCにおいて，AB = 15，BC = 13，CA = 8である．点Pが辺AB上に，点Qが辺AC上にあり，線分PQが三角形ABCの面積を二等分するように動くとき，線分PQの長さの最小値を求めよ．

64 C

実数xに対して，3辺の長さがそれぞれ$2x-1$，x^2-2x，x^2-x+1で表される三角形Tがある．このとき，Tの3つの内角のうち，最大の角の大きさを求めよ．

入試問題にチャレンジ (8)

三角形ABCにおいて，頂点Aから直線BCに下ろした垂線の長さは1，頂点Bから直線CAに下ろした垂線の長さは$\sqrt{2}$，頂点Cから直線ABに下ろした垂線の長さは2である．

このとき，三角形ABCの面積と，内接円の半径，および，外接円の半径を求めよ．

(2010・千葉大学)

入試問題にチャレンジ (8)

三角形 ABC において，頂点 A から直線 BC に下ろした垂線の長さは 1，頂点 B から直線 CA に下ろした垂線の長さは $\sqrt{2}$，頂点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さは 2 である．

このとき，三角形 ABC の面積と，内接円の半径，および，外接円の半径を求めよ．

【解答】

(2010・千葉大学)

BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$ とすると，条件より，

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot a. \quad \cdots ①$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot b. \quad \cdots ②$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot c. \quad \cdots ③$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} bc \sin A. \quad \cdots ④$$

①，②，③より，

$$a = 2c, \quad b = \sqrt{2}\,c.$$

ここで，内接円の半径を r とすると，

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}(a+b+c)r$$

であるから，

$$\frac{1}{2}(2c + \sqrt{2}\,c + c)r = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot c.$$

したがって，

$$\begin{aligned} r &= \frac{2}{3+\sqrt{2}} \\ &= \frac{2(3-\sqrt{2})}{7}. \end{aligned}$$

また，②，④より，

$$\sqrt{2} = c \sin A. \quad \cdots ⑤$$

さらに，三角形 ABC に余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{(\sqrt{2}\,c)^2 + c^2 - (2c)^2}{2 \cdot \sqrt{2}\,c \cdot c} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \frac{\sqrt{14}}{4}. \end{aligned}$$

⑤より，

$$\frac{\sqrt{14}}{4} c = \sqrt{2}$$

であるから，

$$c = \frac{4\sqrt{7}}{7}.$$

③より，

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{4\sqrt{7}}{7} \\ &= \frac{4\sqrt{7}}{7}. \end{aligned}$$

さらに，三角形 ABC の外接円の半径を R とし，正弦定理を用いると，

$$2R = \frac{a}{\sin A}$$

であるから，

$$\begin{aligned} R &= \frac{a}{2\sin A} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{4\sqrt{7}}{7}}{2 \cdot \frac{\sqrt{14}}{4}} \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{7}. \end{aligned}$$

コメント

問題は単純なのですが，条件式が多いために，整理整頓が苦手な生徒には難しく見えるものでしょうね。

逆に図形的な落とし所がない問題なので，式の組合せがうまくいった生徒は満点をとれる問題です。差がつく問題の一例だと思います。