

6/3 FUIIS組

102 ~~103~~ おみ

104 FOL (13)

〜 110までが目標

おみ 独医

(演習
北里かくい)

102 F-2: モンモ-し数, 完全順列, 撈乱順列

玉箱 ① ② ... ④
 箱 [] [] []
 1 2 n
 n組の玉と箱 (1つおみ)
 番号が一致しない
 入れ方 $C(n)$ 通り

$C(1), C(2), C(3), C(4), C(5), C(6)$
 0 1 2 9
 数の上昇の限界

(1) → (3) → (2) の順に解く

[2] [3]
 2-3-1
 3-1-2

(1) [2] [3] [4]

2 ← 1-4 3
 3-4-1
 4-1-3
 3 ← 1-4-2
 4-1-2
 2-1
 4 ← 1-2-3
 3 ← 1-2
 2-1

(3) $C(n+2) = (n+1) \{ C(n) + C(n+1) \}$

を証明. モンモ-し型新化 1908年

(n+2)組の玉と箱からスタート

$C(n+2)$ 通り

どの箱に入れたら (n+1) 通り

n組だから $C(n)$ (n+1)組だから $C(n+1)$

$$C(3) = 2(C(1) + C(2)) = 2$$

$$C(4) = 3(C(2) + C(3)) = 9 \quad (1)$$

$$C(5) = 4(C(3) + C(4)) = 44$$

$$C(6) = 5(C(4) + C(5)) = 265 \quad (2)$$

よ2 (MCは無し)

$$nC_1 + n-1C_2 + n-1C_3 + \dots + n-1C_{n-1}$$

$$= 2^{n-1} - 1 \leftarrow \begin{cases} (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n-1} n-1C_k x^k \\ 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} n-1C_k \end{cases}$$

検 n=3代入
 $2^2 - 1 = 3$
 OK

- 親意の誤解を防止するため
- 一般化のための材料 誘導

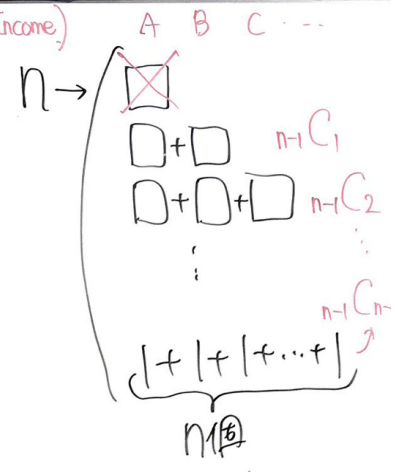
104 具体例 → 規則性

自然数を与えられた自然数の和を表す
 n 順番も考慮する

例 3 →

	A B 君	$2C_1$
2+1		+
1+2		1
+ +		3
A B C 君		箱区別あり

王 区別なし
~~箱区別あり~~



よ2 (MCは無し)

$$nC_1 + n-1C_2 + n-1C_3 + \dots + n-1C_{n-1}$$

$$= 2^{n-1} - 1 \leftarrow \begin{cases} (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n-1} n-1C_k x^k \\ 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} n-1C_k \end{cases}$$

検 n=3代入
 $2^2 - 1 = 3$
 OK

- 親意の誤解を防止するため
- 一般化のための材料 誘導

また、さらに具体化 → 規則性

4 →

1+3	2+2	3+1	$3C_1$
1+1+2	1+2+1	1+1+2	$3C_2$
1+1+1+1			$3C_3$

$$\begin{aligned} &1+(1+1+1) \\ &(1+1)+(1+1) \\ &(1+1+1)+1 \end{aligned}$$



6/3 数学③
私立115組

102 (103) 104 . FOL(13)

110までが目標

(112 easy)

100 B

- (1) $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$ の展開式における定数項を求めよ.
- (2) $(x^2 + x + 1)^5$ の展開式における x^5 の係数を求めよ.

100B (1) 60 (2) 51

101 B

次の条件を満たす整数 x, y, z の組は何通りあるか.

- (1) $x + y + z = 10, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$
- (2) $x + y + z = 10, x > 0, y > 0, z > 0$

101B (1) 66 (2) 36

102 B

1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 枚のカードがある. 次の条件を満たすように左から右に n 枚を並べる場合の数を $C(n)$ とする.

(条件) 1 から n までのすべての自然数 k について, 左から k 番目に番号 k のカードがこない.

- (1) $C(4)$ を求めよ.
- (2) $C(6)$ を求めよ.
- (3) $n \geq 3$ を満たす自然数 n に対して, $C(n+2) = (n+1)\{C(n) + C(n+1)\}$ が成り立つことを証明せよ.

102B (1) $C(4) = 9$ (2) $C(6) = 265$ (3) 略

1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 枚のカードがある. 次の条件を満たすように左から右に n 枚を並べる場合の数を $C(n)$ とする.

(条件) 1 から n までのすべての自然数 k について, 左から k 番目に番号 k のカードがこない.

(1) $C(4)$ を求めよ.

(2) $C(6)$ を求めよ.

(3) $n \geq 3$ を満たす自然数 n に対して, $C(n+2) = (n+1)\{C(n) + C(n+1)\}$ が成り立つことを証明せよ.

【解答】

(1) $C(n)$ の定め方より,

$$C(2) = 1, \quad C(3) = 2.$$

ここで, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ を満たす整数 i, j を用いて, 左から i 番目のカードの番号が j のとき,

$$a_i = j$$

と表すことにする.

また, 4 枚のカードの並べ方は全部で,

$$4! = 24 \text{ 通り.}$$

このうち, 1 つだけ $a_i = i$ となる順列の総数は,

$${}_4C_1 \times C(3) = 8 \text{ 通り.}$$

また, 2 つだけとなる順列の総数は,

$${}_4C_2 \times C(2) = 6 \text{ 通り.}$$

さらに, すべての i に対して, $a_i = i$ となる順列の総数は,

$$1 \text{ 通り.}$$

したがって,

$$\begin{aligned} C(4) &= 24 - (8 + 6 + 1) \\ &= 9. \end{aligned}$$

(2) (1) と同様にすると,

$$\begin{aligned} C(5) &= 5! - \{ {}_5C_1 \times C(4) + {}_5C_2 \times C(3) + {}_5C_3 \times C(2) + 1 \} \\ &= 120 - (45 + 20 + 10 + 1) \\ &= 44, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(6) &= 6! - \{ {}_6C_1 \times C(5) + {}_6C_2 \times C(4) \\ &\quad + {}_6C_3 \times C(3) + {}_6C_4 \times C(2) + 1 \} \\ &= 720 - (264 + 135 + 40 + 15 + 1) \\ &= 265. \end{aligned}$$

(3) $n+1$ 個の数 $1, 2, 3, \dots, n+1$ の順列において, 次の 2 つの場合を考える.

(ア) $1 \leq i \leq n+1$ を満たすすべての i に対して, $a_i \neq i$ である順列の総数は,

$$C(n+1) \text{ 通り.}$$

そのそれぞれに対して, 数 $n+2$ を加えて, すべての i に対して, $a_i \neq i$ となる順列を作る方法は $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$ のいずれかを $n+2$ にすればよい, すなわち,

$$a_k = l \implies a_k = n+1$$

となったとすると,

$$a_{n+2} = l$$

とすればよいので,

$$C(n+1) \times (n+1) \text{ 通り.}$$

(イ) $1 \leq i \leq n+1$ を満たす i のうち, ただ 1 つだけ $a_i = i$ である順列の総数は,

$$C(n) \times (n+1) \text{ 通り.}$$

そのそれぞれに対して, 数 $n+2$ を加えて, すべての i に対して, $a_i \neq i$ となる順列を作る方法は $a_i = n+2$, $a_{n+2} = i$ とすればよいので,

$$C(n) \times (n+1) \text{ 通り.}$$

(ア), (イ) は同時に起こらないので,

$$C(n+2) = (n+1)\{C(n) + C(n+1)\}.$$

103 C

- (1) $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$ のとき, 等式 ${}_nC_k = {}_{n-1}C_{k-1} + {}_{n-1}C_k$ が成り立つことを証明せよ.
- (2) 等式 $k{}_nC_k = n{}_{n-1}C_{k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) が成り立つことを証明せよ.
- (3) 自然数 n に対して, 等式 ${}_nC_1 + 2 \cdot {}_nC_2 + 3 \cdot {}_nC_3 + \dots + n \cdot {}_nC_n = 2^{n-1} \cdot n$ が成り立つことを証明せよ.

104 C

自然数 n をそれより小さい自然数の和として表すことを考える. ただし, $1+2+1$ と $1+1+2$ のように和の順序が異なるものは別の表し方とする. 例えば, 自然数 2 は $1+1$ の 1 通りの表し方ができ, 自然数 3 は,

$$2+1, \quad 1+2, \quad 1+1+1$$

の 3 通りの表し方ができる. 2 以上の自然数 n の表し方は何通りか.

入試問題にチャレンジ (13)

$\left(x - \frac{x^2}{2} + y^2 - 2y^3\right)^{10}$ を展開して得られる x, y の多項式について, 次数が 12 である項の係数の和を求めよ.

(2009・群馬大学)

第14講

確率(1)

1 試行と事象

同じ条件下で繰り返すことができる実験や観測を**試行**といい、試行の結果起こる事柄を**事象**という。

2 同様に確からしい

1つの試行で起こるいくつかの事象について、それらのどれも起こることも同じ程度に期待できるとき、それらの事象は**同様に確からしい**という。

3 根元事象

ある試行の結果として起こり得るすべての場合が N 通りあって、この N 通りのうちの1つだけからなる事象のことを**根元事象**という。

4 全事象

ある試行において、起こり得る場合全体の集合を、その試行の**全事象**という。

5 確率の定義

どの根元事象も同様に確からしい試行において、

全事象 U に属する根元事象の個数を $n(U)$,

事象 A に属する根元事象の個数を $n(A)$

とするとき、事象 A の起こる確率 $P(A)$ は、

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

6 確率の基本性質

任意の事象 A に対して $0 \leq P(A) \leq 1$

7 和事象と積事象, 互いに排反

2つの事柄 A, B に対して、「 A または B の少なくとも一方が起こる」という事象 (**和事象**) を $A \cup B$ で表す。

また、「 A と B がともに起こる」という事象 (**積事象**) を、 $A \cap B$ で表す。

「 A と B がともに起こる」ということがないとき、 A と B は**互いに排反**という。

8 確率の加法定理

2つの事象 A, B に対して、 A と B が互いに排反のとき、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

9 余事象の確率

ある試行において1つの事象 A を考えるとき、「 A が起こらない」というのも1つの事象である。これを A の**余事象**といい、 \bar{A} で表す。

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

105 A

2個のさいころを同時に振るとき、次の確率を求めよ。

- (1) 出る目の和が4である確率.
- (2) 出る目の差が3である確率.
- (3) 出る目の積が偶数である確率.

$$\boxed{105A} \quad (1) \quad \frac{1}{12} \quad (2) \quad \frac{1}{6} \quad (3) \quad \frac{3}{4}$$

106 A

赤球3個と白球2個の合計5個の球が入っている袋から、2個の球を同時に取り出すとき、赤球1個と白球1個が取り出される確率を求めよ。

$$\boxed{106A} \quad \frac{3}{5}$$

107 A

A, B, C, D, E, F, G, Hの8文字を無作為に一行に並べるとき、次の確率を求めよ。

- (1) AとBが隣り合う確率.
- (2) AはBより左で、BはCより左にある確率.

$$\boxed{107A} \quad (1) \quad \frac{1}{4} \quad (2) \quad \frac{1}{6}$$

108 B

赤球 2 個，白球 2 個，全部で 4 個の球を円周上に並べる．このとき，同じ色の球が隣り合わない確率を求めよ．

$$\boxed{108B} \quad \frac{1}{3}$$

109 B

袋の中に赤球 4 個，白球 3 個，青球 2 個の計 9 個の球が入っている．この中から同時に 4 個の球を取り出すとき，次の確率を求めよ．

- (1) 2 種類の色の球がそれぞれ 2 個である確率．
- (2) 球の色が 3 種類である確率．
- (3) 赤球と青球が含まれる確率．

$$\boxed{109B} \quad (1) \quad \frac{3}{14} \quad (2) \quad \frac{4}{7} \quad (3) \quad \frac{43}{63}$$

110 B

3 個のさいころを同時に振るとき，次の確率を求めよ．

- (1) 出る目がすべて 4 以下である確率．
- (2) 出る目の最大値が 5 である確率．

$$\boxed{110A} \quad (1) \quad \frac{8}{27} \quad (2) \quad \frac{61}{216}$$

111 C

箱の中に1から10までの10枚のカードが入っている。この箱の中から3枚のカードを同時に取り出すとき、最大の番号が8以上で、最小の番号が2以下である確率を求めよ。

112 C

3人がじゃんけんを1回だけするとき、次の確率を求めよ。

- (1) 1人だけが勝つ確率。
- (2) 勝ち負けが決まらない（アイコである）確率。

入試問題にチャレンジ (14)

N を自然数とする。赤いカード2枚と白いカード N 枚が入っている袋から無作為にカードを1枚ずつ取り出して並べていくゲームをする。2枚目の赤いカードが取り出された時点でゲームは終了する。赤いカードが最初に取り出されるまでに取り出された白いカードの枚数を X とし、ゲーム終了時までに取り出された白いカードの総数を Y とする。

- (1) $n = 0, 1, \dots, N$ に対して、 $X = n$ となる確率 p_n を求めよ。
- (2) $n = 0, 1, \dots, N$ に対して、 $Y = n$ となる確率 q_n を求めよ。

(2010・神戸大学)

箱の中に1から10までの10枚のカードが入っている。この箱の中から3枚のカードを同時に取り出すとき、最大の番号が8以上で、最小の番号が2以下である確率を求めよ。

【解答】

10枚のカードから3枚のカードを取り出す方法の総数は、

$${}_{10}C_3 = 120 \text{ 通り}$$

あり、これらは同様に確からしい。

このうち、最大の番号が8以上で、最小の番号が2以下であるのは、取り出されるカードが次のような場合を考えればよい。

- (i) 番号が8以上のカードが2枚、番号が2以下のカードが1枚のとき。
- (ii) 番号が8以上のカードが1枚、番号が2以下のカードが2枚のとき。
- (iii) 番号が8以上のカードが1枚、番号が2以下のカードが1枚、番号が3以上7以下のカードが1枚のとき。

(i) を満たすカードの取り出し方は、

$${}_3C_2 \times {}_2C_1 = 6 \text{ 通り.}$$

(ii) を満たすカードの取り出し方は、

$${}_3C_1 \times {}_2C_2 = 3 \text{ 通り.}$$

(iii) を満たすカードの取り出し方は、

$${}_3C \times {}_2C_1 \times {}_5C_1 = 30 \text{ 通り.}$$

したがって、求める確率は、

$$\frac{6 + 3 + 30}{120} = \frac{13}{40}.$$

(誤答)

番号が8以上のカードを1枚、番号が2以下のカードが1枚を取り出せばよいので、残りの1枚は何でもよい。

したがって、求める確率は、

$$\frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_8C_1}{120} = \frac{2}{5}.$$

(誤答終り)

3人がじゃんけんを1回だけするとき、次の確率を求めよ。

- (1) 1人だけが勝つ確率。
(2) 勝ち負けが決まらない（アイコである）確率。

【解答】

3人がじゃんけんを1回だけするとき、手の出し方は、

$$3^3 = 27 \text{通り}$$

あり、これらは同様に確からしい。

- (1) 1人だけが勝つのは、勝つ人の選び方が3通り、そのそれぞれに対して、その人が出す手の選び方が3通りあるから、求める確率は、

$$\frac{3 \times 3}{27} = \frac{1}{3}.$$

- (2) 2人だけ勝つ確率は、

$$\frac{{}_3C_2 \times 3}{27} = \frac{1}{3}.$$

これと(1)の結果より、勝ち負けが決まらない確率は、

$$1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}.$$

入試問題にチャレンジ (14)

N を自然数とする. 赤いカード 2 枚と白いカード N 枚が入っている袋から無作為にカードを 1 枚ずつ取り出して並べていくゲームをする. 2 枚目の赤いカードが取り出された時点でゲームは終了する. 赤いカードが最初に取り出されるまでに取り出された白いカードの枚数を X とし, ゲーム終了時までに取り出された白いカードの総数を Y とする. このとき, 以下の間に答えよ.

(1) $n = 0, 1, \dots, N$ に対して, $X = n$ となる確率 p_n を求めよ.

(2) $n = 0, 1, \dots, N$ に対して, $Y = n$ となる確率 q_n を求めよ.

【解答】

(2010・神戸大学)

$(N+2)$ 枚のカードはすべて区別し, すべて取り出して左から順に並べていくことにする.

このとき, カードの並べ方は,

$$(N+2)! \text{通り}$$

あり, これらは同様に確からしい.

(1) $X = n$ となるのは, 左から n 枚目までがすべて白いカードで, $(n+1)$ 枚目が赤いカード. さらに, 残りの $(N-n+1)$ 枚のうちいずれか 1 枚が赤いカードのときである.

したがって, $X = n$ となるような $(N+2)$ 枚のカードの並べ方は,

$$(N-n+1) \cdot 2! \cdot N! \text{通り}$$

あるから,

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{(N-n+1) \cdot 2! \cdot N!}{(N+2)!} \\ &= \frac{2(N-n+1)}{(N+1)(N+2)}. \end{aligned}$$

(2) $Y = n$ となるのは, 左から $(n+1)$ 枚目までのカードのうち, 1 枚だけが赤いカードであり, 左から $(n+2)$ 枚目が赤いカード. さらに, 残りの $(N-n)$ 枚のカードがすべて白いカードのときである.

したがって, $Y = n$ となるような $(N+2)$ 枚のカードの並べ方は,

$$(n+1) \cdot 2! \cdot N! \text{通り}$$

あるから,

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{(n+1) \cdot 2! \cdot N!}{(N+2)!} \\ &= \frac{2(n+1)}{(N+1)(N+2)}. \end{aligned}$$

2019 年度 FG 数学 IAIIB 【解答】 1 4 講

105A (1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{3}{4}$

【解法】

106A $\frac{3}{5}$

【解法】

107A (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{6}$

【解法】

108B $\frac{1}{3}$

【解法】

109B (1) $\frac{3}{14}$ (2) $\frac{4}{7}$ (3) $\frac{43}{63}$

【解法】

110A (1) $\frac{8}{27}$ (2) $\frac{61}{216}$

【解法】

過去問めぐり・北里の確率

談話室マロニエ

1 2011 北里大学

(2) n が $4 \leq n \leq 9$ を満たす自然数のとき、4 個の数字 1, 2, 3, n を用いて 4 桁の整数をつくる。

(i) $n=5$ のとき、3000 より小さい数は全部で 個できる。

(ii) 1 つの n に対して、1, 2, 3, n からつくられる 4 桁の整数のうち、2000 より小さい数の総和を S_n とするとき、 S_n を n を用いて表わすと、 $S_n =$ である。 $S_n = 8442$ となるときの n の値は

である。

2 2010 北里大学 1/30, 選抜入試(1次) 医

(3) 赤, 青, 黄, 緑のカードが 2 枚ずつ合計 8 枚ある。8 枚のカードから 4 枚を取り出し、左から順に並べるとき、

(i) 並べたものに緑のカードがない確率は である。

(ii) 並べたものが 2 色からなる確率は である。

(iii) 並べたものが 4 色からなる確率は である。

(iv) 同じ色のカードが隣り合わないように並ぶ確率は である。

3 2009 北里大学 1/25, 選抜入試(第1次) 医

(3) 6 個の箱があり、1 から 6 まで番号がついている。さいころを振り、出た目の数と同じ数のついた箱に球を 1 つ入れる。ただし、球は元に戻さない。これを 4 回繰り返す。

(i) 1 個の箱にだけ球が入る確率は である。

(ii) 番号 1 のついた箱と番号 2 のついた箱の両方に球が入り、他の箱には球が入らない確率は である。

(iii) 2 個の箱に 2 つずつ球が入る確率は である。

(iv) 4 個の箱に 1 つずつ球が入る確率は である。

4 2008 北里大学 1/27, 第 1 次試験 医

(4) 表にダイヤ、スペード、ハート、クラブのマークが書かれた札がそれぞれ 3 枚ずつ計 12 枚ある。各マークの札には 1 から 3 までの数字が順に 1 つずつ表にふられている。これら 12 枚の札を裏返しにしてから、3 枚の札を無作為に取り出す。

(i) 3 枚がすべて同じマークになる確率は である。

(ii) 3 枚がすべて同じ数字になる確率は である。

(iii) 3 枚のマークがすべて異なる確率は である。

(iv) 3 枚のマークがすべて異なり、かつ数字もすべて異なる確率は である。

5 2007 北里大学 1/28, 第 1 次試験 医

(3) 赤球、白球、黄球がそれぞれ 2 個、3 個、4 個入っている袋 A、3 個、4 個、2 個入っている袋 B、4 個、2 個、3 個入っている袋 C がある。A、B、C の袋から同時に 1 球ずつ取り出すとき、取り出された 3 球がすべて同じ色である確率は である。また取り出された 3 球がすべて異なる色である確率は である。

6 2006 北里大学 1/29, 第 1 次, 本学 医学部

(4) A 氏、B 氏はそれぞれ 1 から 4 までの番号が 1 つずつ書いてある 4 枚のカードを持っている。1 枚ずつカードを出し合い、次の回には残りのカードから 1 枚ずつ出し合う。

(i) 1 回目にカードの番号が同じになる確率は である。

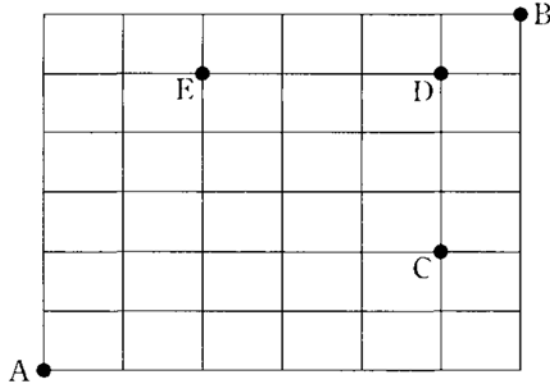
(ii) 2 回目に初めてカードの番号が同じになる確率は である。

(iii) 3 回目に初めてカードの番号が同じになる確率は である。

(iv) 4 回目に初めてカードの番号が同じになる確率は である。

7 2005 北里大学 1/23, 第 1 次試験, 本学 医学部

(4) 次図のように、縦 7 本、横 7 本の道がある。A 地点から B 地点まで最短経路を行くとする。



(i) A から B までの行き方は 通りある。

(ii) (i)のうち、C を通る行き方は 通りある。

(iii) (i)のうち、C、D、E のどの地点も通らない行き方は 通りある。

8 2004 北里大学 1/25, 第 1 次試験, 本学 医学部

(4) 4 人でじゃんけんをして、負けた者から順にぬけてゆき、最後に残った 1 人を勝者とする。

このとき、1 回のじゃんけんでは 1 人の勝者が決まる確率は である。1 回目終了後に 2 人

が残っている確率は , 4 人とも残っている確率は である。また、2 回目のじゃ

んけんでは 1 人の勝者が決まる確率は である。

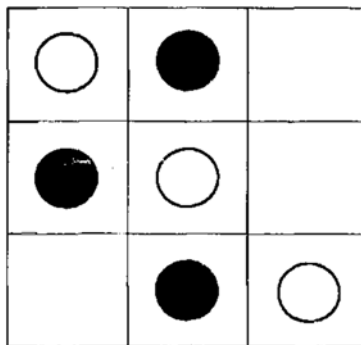
9 2003 北里大学 1/26, 第 1 次試験, 本学 医学部

(4) 縦 3 列, 横 3 列, 合計 9 つのますの中に黒石 3 つ, 白石 3 つ, 合計 6 つの石を置く。1 つのますの中には, 石は 1 つしか置けない(下記図参照)。

(i) 6 つの石の置き方は全部で 通りある。

(ii) 黒石が縦または横の 1 列に並ぶ場合の総数は である。

(iii) 縦のどの列にも黒石と白石が置いてあり, かつ横のどの列にも黒石と白石が置いてある場合の総数は である。



10 2002 北里大学 1/27, 第 1 次試験, 本学 医学部

(3) 16 人の選手がいて, 4 人ずつ赤, 白, 青, 黄のユニフォームを着ている。同じ色のユニフォームを着ている 4 人はそれぞれ赤, 白, 青, 黄の帽子をかぶっている。今 16 人の選手から 4 人を無作為に選び出す。

このとき, 4 人が同じ色のユニフォームを着ている確率は , 4 人のそれぞれが同じ色のユニフォームと帽子を身につけている確率は である。また, 4 人のユニフォームの色が 2 色になる確率は である。

11 2001 北里大学 1/28, 第 1 次試験, 本学 医学部

(2) 6 個の箱があり, これらの箱には 1 から 6 までの番号がふられている。また, 1 から 6 までの番号札があり, よくきったのち, それらを 1 枚ずつそれぞれの箱の中に入れる。このとき番号札の番号と箱の番号が一致する札の枚数を n とすると, $n=6$ となる確率は , $n=4$ となる確率は , $n=2$ となる確率は である。