zemis2020-08-31

LTC 8/31.

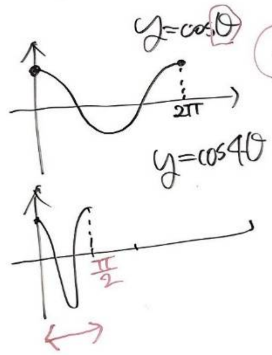
[1] $y=3\cos(4\theta-3\pi) \longleftarrow y=\cos 4\theta$

$4\left(\theta-\frac{3\pi}{4}\right)$

θ方向 $\frac{3\pi}{4}$ 平行移動

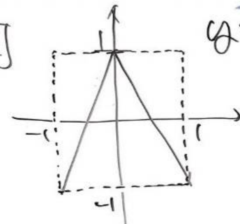
y方向 3倍拡大

周期 $y=\cos 4\theta$と同じで $\frac{\pi}{2}$



[2] 合成関数の追跡 (頻)

[2]



(1) $y=(f\circ f)(x)$ のグラフ

$\Leftrightarrow$ $y=f(f(x))$ のグラフ

[439] $f(x)=\frac{1}{1-x}$

$y=ax+b$ と $y=f(f(x))$ が共有点をもたない!

$\Rightarrow$ (a,b)の存在範囲を図示.

$t=f(x)$ とおくと $t=\frac{1}{1-x}$ ($x\neq 1$, $t\neq 1$ より $\therefore x\neq 0$)

$y=f(t)=\frac{1}{1-t}$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{1-x}{1-x-1}=\frac{x-1}{x}$

$y=\frac{x-1}{x}$ と $y=ax+b$ が

共有点をもたない ⇒ 連立

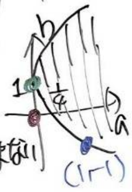
$\frac{x-1}{x}=ax+b$ ($x\neq 0$)

$ax^2+(b-1)x+1=0$

判別式 $D=(b-1)^2-4a<0$

2次のみ

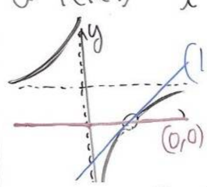
$a>\frac{1}{4}(b-1)^2$



図の斜線部(境界含まない)

↓修正.

$y=f(f(x))=\frac{x-1}{x}$ ($x\neq 0$, $x\neq 1$) 忘れるな



$b=0$は除く

$a=0$のとき $(b-1)x+1=0$

$b=1$なら解なし

[440] a, b, c: 実数

(1) $f(x)=x^2+ax+b$

$f(f(x))-x$ が $f(x)-x$でわり切れる ことを証明

[解1] 実際にわり算(筆算)

[解2] $t=f(x)-x$ とおき tでくくる

$f(f(x))-x=(f(x))^2+af(x)+b-x$

$=(t+x)^2+a(t+x)+b-x$

$=t^2+2xt+x^2+at+ax+b-x$

$=t(t+2x+a)+\underbrace{x^2+ax+b-x}_{f(x)-x=t}$

$=t(t+2x+a+1)$

$=(f(x)-x)(f(x)+x+a+1)$ 答 ∎

(2) $\begin{cases} y=x^2+c \\ x=y^2+c \end{cases}$ y消去

$x=(x^2+c)^2+c$

$\Leftrightarrow (x^2+c)^2+c-x=0$ —㊀

$f(x)=x^2+c$ とおく ($a=0$, $b=c$)

㊀ $\Leftrightarrow f(f(x))-x=0$

$\Leftrightarrow (f(x)-x)(f(x)+x+\cancel{a}+1)=0$

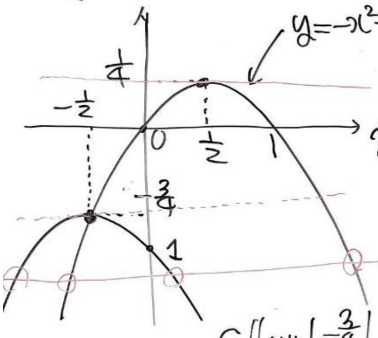
$\Leftrightarrow (x^2+c-x)\cdot(x^2+x+c+1)=0$

$\Leftrightarrow -x^2+x=c$ または

$-x^2-x-1=c$

定数分離

$$\left[\,-x^2-x-1=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\,\right]$$



c	…	$-\frac{3}{4}$	…	$\frac{1}{4}$	…
個	4	2	2	1	0

[別解] 誘導に乗らない解法

$$\begin{cases} y=x^2+c & \text{①} \\ x=y^2+c & \text{②} \end{cases}$$ ①かつ②

対称性をうまく使う

① − ②　$y-x=x^2-y^2$

$(x-y)(x+y+1)=0$

$x=y$ または $x+y+1=0$

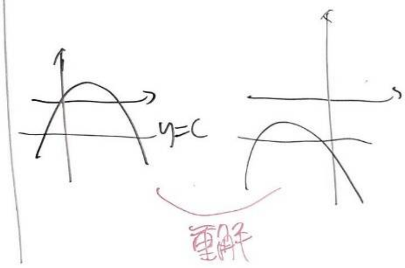
かつ

① + ②　$x+y=x^2+y^2+2c$

(i) $x=y$ のとき　$x^2-x+c=0$

(ii) $x+y+1=0$ のとき　$x^2+x+1+c=$

(i) または (ii) より　以下同様



56講 数列の極限(1) ⇨ 不定形

441 (1) $\infty-\infty$ (2次 3次) $\xrightarrow{\text{くくる}}$ $-\infty$

(2) $\frac{\infty}{\infty}\left(\frac{2次}{2次}\right)$ $\xrightarrow[n^2\text{でわる}]{}$ 3

(3) $\frac{\infty}{\infty}\left(\frac{1次}{2次}\right)$ $\Longrightarrow$ 0

442 (1) $\frac{\infty}{\infty}\left(\frac{1次}{1次}\right)$ $\xrightarrow[\text{わる}]{n=\sqrt{n^2}\text{で}}$ $\frac{5}{2}$

(2) 分母・分子 $\infty-\infty$ $\Longrightarrow$ 分母分子を有理化 $\frac{\infty}{\infty}$ ⇨ 2

(3) $\infty-\infty$ $\Longrightarrow$ 有理化 $\frac{\infty}{\infty}$ ⇨ $\frac{2}{3}$

443 (1) $\frac{\pm 1}{\infty}$ ⇨ 0

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$　$\frac{\pm1\text{の間}}{\infty}$ ⇨ 0

記述では『はさみうちの原理』を用いる方が安全　$\frac{有限}{無限}=0$

(1) $-1\leqq(-1)^n\leqq 1$

$-\frac{1}{n}\leqq\frac{(-1)^n}{n}\leqq\frac{1}{n}$

$n\to\infty$ とすると

$0\leqq\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}\leqq 0$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$

(2) $|\sin n\theta|\leqq 1$

$\left|\frac{\sin n\theta}{n}\right|\leqq\frac{1}{|n|}$

$n\to\infty$ とすると

$0\leqq\left|\frac{\sin n\theta}{n}\right|\leqq 0$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=0$

444

(1) 与式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

より

与式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}\cdot 3n(3n+1)(6n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(54n^3+\sim)-(2n^3+\sim)}{2n^3+\sim}$

$=26$

(3) $[x]$：xを超えない最大の整数

$x>0$なら 整数部分　滝川キリステル

小数部分を切り捨てる

$[x]\leqq x<[x]+1$　わかりやすいが役立たず

$[x]\leqq x$　　$x-1<[x]$

$\boxed{x-1<[x]\leqq x}$　わかりにくいが役に立つ

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-\left[\frac{n}{2}\right]}-n\right)$　有理化

(注) 答だけなら　金持ち　$n\to\infty$ より

$(与式)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-\frac{n}{2}}-n\right)=-\frac{1}{4}$

Gauss 無視　小銭捨てる

$\frac{n}{2}-1<\left[\frac{n}{2}\right]\leqq\frac{n}{2}$ より

$\sqrt{n^2-\frac{n}{2}}\leqq\sqrt{n^2-\left[\frac{n}{2}\right]}\leqq\sqrt{n^2-\left(\frac{n}{2}-1\right)}$

$-n$　　$-n$　　$-n$

(左辺) $=\sqrt{n^2-\frac{n}{2}}-n$　($n\to\infty$

$=\frac{-\frac{n}{2}}{\sqrt{n^2-\frac{n}{2}}+n}\to-\frac{1}{4}$

(右辺) $=\sqrt{n^2-\frac{n}{2}+1}-n$　($n\to\infty$

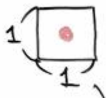
$=\frac{-\frac{n}{2}+1}{\sqrt{n^2-\frac{n}{2}+1}+n}\to-\frac{1}{4}$

より $-\frac{1}{4}\leqq\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-\left[\frac{n}{2}\right]}-n\right)\leqq-\frac{1}{4}$

はさみうちの原理より (与式) $=-\frac{1}{4}$

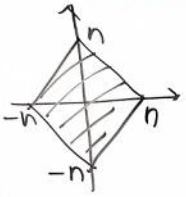
$\boxed{445}$ a_n : $|x|+|y| \leqq n$ に含まれる格子点の個数

then $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} = \boxed{?}$



《考察》答だけで良ければ

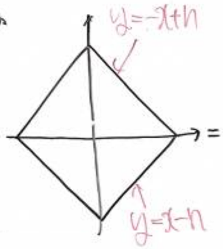
面積1 $\xleftrightarrow{\text{おおよそ}}$ 格子点1個



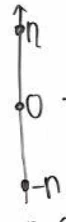
面積 $\dfrac{(2n)^2}{2} = 2n^2$ より

$a_n \fallingdotseq 2n^2$

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} = 2$



$x=0$



$x>0$

$=$ (x=0) $+ \; 2 \times$ (x>0)

対称性

$x=k$上の格子点

$(n-k)-(k-n)+1$

$=2n-2k+1$

$1+3+5+\cdots(2n-1)$

$a_n = (2n+1) + 2 \times \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)$

$= (2n+1) + 2 \times \dfrac{\{1+(2n-1)\}\times n}{2}$

$= 2n^2+2n+1$

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$

$=2$