zemis2020-09-02（board）

$\boxed{454}$ テーマ：解けない漸化式の極限

$$\begin{cases} 0<a_1<3 \\ a_{n+1}=1+\sqrt{1+a_n} \end{cases} \Rightarrow^{(3)} \lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{?}$$

《考察》 $f(x)=1+\sqrt{1+x}$ とおくと $a_{n+1}=f(a_n)$

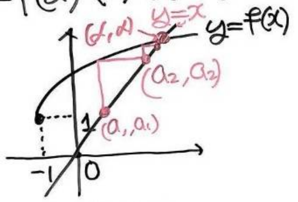
out　in

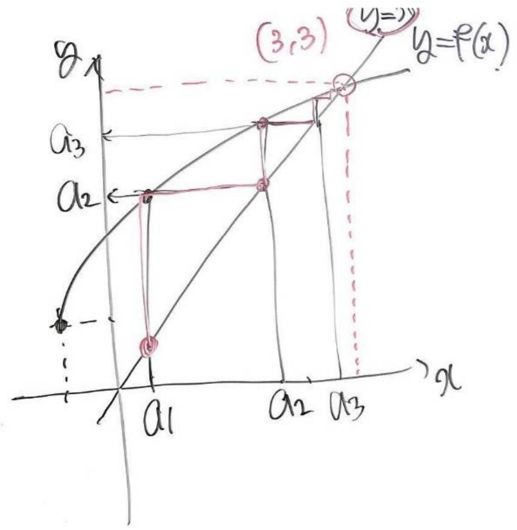
× ① 収束を仮定 $\alpha=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}$

とおくと $\alpha=f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha=3$ —(答)

△ ② グラフで捉える

$\lim_{n\to\infty} a_n = 3$





$\boxed{454}$ テーマ：解けない漸化式の極限

$$\begin{cases} 0<a_1<3 \\ a_{n+1}=1+\sqrt{1+a_n} \end{cases} \Rightarrow^{(3)} \lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{?}$$

《考察》 $f(x)=1+\sqrt{1+x}$ とおくと $a_{n+1}=f(a_n)$

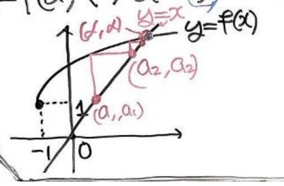
out　in

× ① 収束を仮定 $\alpha=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}$

とおくと $\alpha=f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha=3$ —(答)

△ ② グラフで捉える

$\lim_{n\to\infty} a_n = 3$


③ 極限の絞り込み（区間縮小法）

$a_{n+1}=1+\sqrt{1+a_n}$　両辺から $\alpha=3$ をひく

$a_{n+1}-3=\sqrt{a_n+1}-2$

$n+1$ 作る

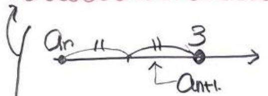
$= \dfrac{\sqrt{\phantom{x}}-2}{1}\times\dfrac{\sqrt{\phantom{x}}+2}{\sqrt{\phantom{x}}+2}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{a_n+1}+2}(a_n-3)$

$n$ 出現

$|a_{n+1}-3| = \dfrac{1}{\sqrt{\phantom{x}}+2}|a_n-3| \leqq \dfrac{1}{2}|a_n-3|$

$\therefore |a_{n+1}-3| \leqq \dfrac{1}{2}|a_n-3|$




$a_{n+1}$ と3のキョリは

$a_n$ と3のキョリの半分以下

これをくり返し用いると

$|a_n-3| \leqq |a_1-3|\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

極限 $0 \leqq \lim_{n\to\infty}|a_n-3| \leqq 0$

はさみうちの原理より

$\lim_{n\to\infty}|a_n-3|=0$　$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=3$

$\boxed{\text{試算}}$ (2) $3-a_{n+1} < \frac{1}{3}(3-a_n)$　(1)がある．

① 絶対値が外れている

② 係数が $\frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{3}$ より厳しい

甘い

(1) $0<a_n<3$ を証明

(i) $n=1$ のとき成立

(ii) $n=k$ のとき $0<a_k<3$ を仮定

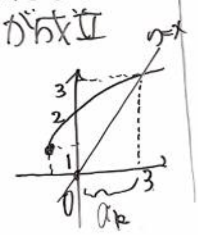
$1<\sqrt{1+a_k}<2$

$2<1+\sqrt{1+a_k}<3$

$0<2<a_{k+1}<3$

$n=k+1$ のときも成立

全ての自然数 $n$ で $0<a_n<3$ が成立




(2) $3-a_{n+1} < \frac{1}{3}(3-a_n)$ を証明

$a_{n+1}=1+\sqrt{1+a_n}$ より

$3-a_{n+1}=3-(1+\sqrt{1+a_n})$

$n+1$ 作る

$= \dfrac{2-\sqrt{1+a_n}}{1}\times\dfrac{2+\sqrt{1+a_n}}{2+\sqrt{1+a_n}}$

$= \boxed{\dfrac{1}{2+\sqrt{1+a_n}}}(3-a_n)$

$n$ 出現

ここで $2+\sqrt{1+a_n}>3$ より

$\boxed{\dfrac{1}{2+\sqrt{1+a_n}}} < \boxed{\dfrac{1}{3}}$

$\therefore 3-a_{n+1} < \frac{1}{3}(3-a_n)$ 終

(3) これをくり返し用いると

$0<3-a_n<(3-a_1)\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

極限をとると

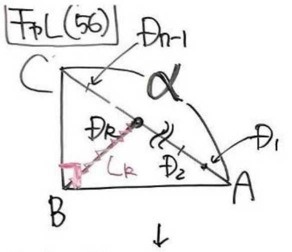
$0 \leqq \lim_{n\to\infty}(3-a_n) \leqq 0$

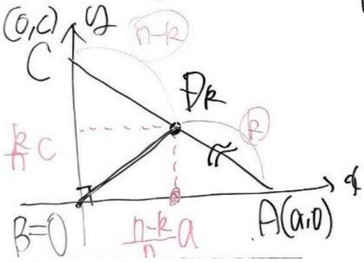
はさみうちの原理より

$\lim_{n\to\infty}(3-a_n)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=3$ —||

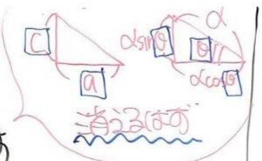
チャレ(56)




ACをn等分
$D_k$はAから数えてk番目

$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}(L_k)^2$ をα,nで表す




図のように座標をとる。

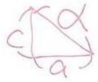
$$L_k^2=(BD_k)^2=\left(\frac{n-k}{n}a\right)^2+\left(\frac{k}{n}c\right)^2$$

$$=\frac{1}{n^2}\{\underbrace{(n-k)^2}_{(n-1)\sim1}a^2+\underbrace{k^2}_{1\sim(n-1)}c^2\}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}(L_k)^2=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\{(n-k)^2a^2+k^2c^2\}$$

$$=\frac{1}{n^2}\left\{a^2\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2}_{同じ}+c^2\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}k^2}_{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)}\right\}$$

$$=\frac{1}{6n}(n-1)(2n-1)\underbrace{(a^2+c^2)}_{\alpha^2}$$




$$=\frac{1}{6n}(n-1)(2n-1)\alpha^2$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\frac{1}{3}\alpha^2$

452 誘導つき漸化式

(1) $b_{n+1}=5b_n+1$

$b_{n+1}$を作ると $b_n$が出現

(2) $b_n=\frac{1}{12}5^n-\frac{1}{4}$ より

$a_n=\frac{12}{5^n-3}+2$ ∴ $\lim_{n\to\infty}a_n=2$

~~2n−1次~~ 指
~~2n次~~ 指

453 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+x^2+x}{x^{2n}+1}$

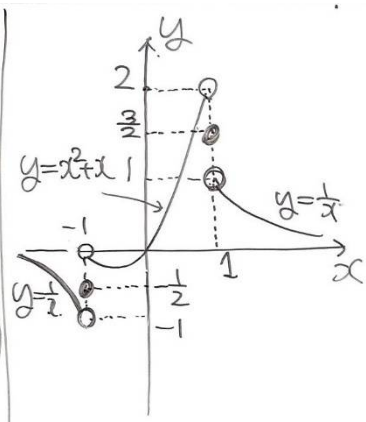
$\frac{\infty}{\infty}$とは限らない

limでは、まず不定形を確認

変数はn　xと±1の大小で場合分け

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & (|x|<1) \\ \frac{3}{2} & (x=1) \\ \frac{1}{x} & (|x|>1)☆ \\ -\frac{1}{2} & (x=-1) \end{cases}$$

☆ $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{x^2+x}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$




455 (1) $h>0$のとき (n:自然数)　帰納法でもOK

$(1+h)^n\ge 1+nh+\frac{1}{2}n(n-1)h^2$を証明

誤答例
二項定理より

$(1+h)^n={}_nC_0+{}_nC_1h^1+{}_nC_2h^2+\cdots$

$\ge 1+nh+\frac{1}{2}n(n-1)h^2$ 終

⇓ 修正

上の式は、$n\ge2$のときのみ成立

$n=1$のときは (左辺)$=1+h$

(右辺)$=1+h$ より成立 終

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=\boxed{?}$

注 答だけなら、$\frac{\infty}{\infty}\left(\frac{1次}{指数}\right)=0$

無限大のオーダー

$\log n\ll\sqrt{n}\ll n^1\ll n^2\ll n^3\ll\cdots\ll 2^n\ll e^n\ll 3^n$

(1)で $h=2$とおくと　$3^n\ge 1+2n+2n(n-1)$

∴ $3^n\ge 1+2n^2$

$0<\frac{1}{3^n}\le\frac{1}{1+2n^2}$

$0<\frac{n}{3^n}\le\frac{n}{1+2n^2}$　$\frac{\infty}{\infty}\left(\frac{1次}{2次}\right)=0$

極限とって

$0\le\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}\le0$

はさみうちの原理より

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0$

456 ← 454の発展型 (Newton法)

チャレ(59) 授業ではやらない (背景) Pell方程式

58講

457 無限級数＝第n部分和の極限

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

(1) $1-\frac{1}{n+1}\to 1$ , (2) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\to\frac{1}{2}$

458 次回 (通称) おい出しの原理

459 (1) $\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\longrightarrow\frac{1}{2}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ $k+1-1$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{1!}-\frac{1}{(n+1)!}\right\}$

$=1$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3k+1}}$

Σ計算できない

具体化

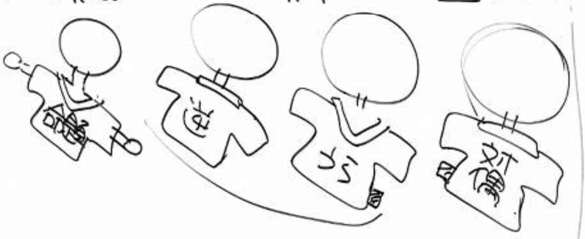
$$\frac{1}{4}+\frac{2}{7}+\frac{3}{10}+\underbrace{\frac{4}{13}+\cdots+\overset{\text{ほぼ}}{\frac{1}{3}}}_{\text{無限に続く}}$$

∞に発散しそう

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束 $\overset{\text{ならば}}{\Longrightarrow}$ $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

(対偶) $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}a_n$ は発散

逆「$\lim_{n\to\infty}a_n=0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束」は真 偽




$a_n=\frac{n}{3n+1}$ とおく

$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}\neq0$ より $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散 //

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3k+1}}$

Σ計算できない

具体化

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{7}+\frac{3}{10}+\underbrace{\frac{4}{13}+\cdots+\overset{\text{ほぼ}}{\frac{1}{3}}}_{\text{無限に続く}}$$

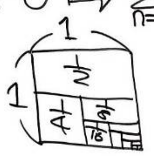
∞に発散しそう

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束 $\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

(対偶) $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}a_n$ は発散

逆「$\lim_{n\to\infty}a_n=0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束」は真 偽

成り立つ例




$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots\to1$

田分け

成り立たない例 (反例) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots\to\infty$

これを証明せよ!

$a_n=\frac{n}{3n+1}$ とおく

$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}\neq0$ より $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散 //

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$

$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cdots$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$

$\frac{1}{2}$が無限こ

$\to\infty$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3k+1}}$

Σ計算でき

具体化

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{7}+\frac{3}{10}+\underbrace{\frac{4}{13}+\cdots}_{\text{無限に続く}}$$

∞に発散しそう

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\times\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\times\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{(1+x)-(1-x)}\times\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}=\frac{1+1}{1+1+1}=\frac{2}{3}$$

$\frac{2x}{2x}=1$

有理化 $\sqrt{\ }-\sqrt{\ }$
$a-b\Rightarrow a^2-b^2$ へ

$\boxed{(a-b)(a+b)=a^2-b^2}$

$\sqrt[3]{\ }-\sqrt[3]{\ }$
$a-b \Rightarrow a^3-b^3$

$\boxed{(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3}$

別解 $\frac{1}{3}$乗と$\frac{1}{2}$乗が混在 ⇨ $\frac{1}{6}$乗を基準に

$\boxed{a=\sqrt[6]{1+x},\ b=\sqrt[6]{1-x} \text{ とおく}}$

$\left(\begin{aligned}a^2=\sqrt[3]{1+x},\ b^2=\sqrt[3]{1-x}\\ a^3=\sqrt{1+x},\ b^3=\sqrt{1-x}\end{aligned}\right)$

共通の
$x\to 0$のとき
$a\to 1,\ b\to 1$

$$(\text{与式})=\lim_{x\to 0}\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3} \leftarrow \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{(a-b)}(a+b)}{\cancel{(a-b)}(a^2+ab+b^2)}=\frac{2}{3}$$

(2) 誤答例 キケン $\boxed{\sqrt{a^2}=|a|}$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(3x+1+\sqrt{9x^2+4x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{9x^2+4x+1}+(3x+1)}{1}\times\frac{\sqrt{\quad}-(\ )}{\sqrt{\quad}-(\ )}$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{(9x^2+4x+1)-(3x+1)^2}{\sqrt{\quad}-(\ )}$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{-2x}{\sqrt{9x^2+4x+1}-(3x+1)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-2}{\sqrt{9+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-\left(3+\frac{1}{x}\right)}=\frac{-2}{0}=\pm\infty$$

⁉

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ $\boxed{e\text{の定義}}$

$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$

$(1+0)^{\infty}$

$\frac{\infty}{\infty}\left(\frac{1次}{1次}\right)$ $\cancel{x=\sqrt{x^2}}$ $x<0$

[分母分子を$x$でわる
$\sqrt{\ }$内は$x^2$でわる]

⇩ 安全ルート：$x=-t$とおく

$$(\text{与式})=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{9t^2-4t+1}-3t+1\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{\quad}-(3t-1)}{1}\times\frac{\sqrt{\quad}+(\ )}{\sqrt{\quad}+(\ )}$$

$t>0$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(9t^2-4t+1)-(3t-1)^2}{\sqrt{9t^2-4t+1}+(3t-1)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2t}{\sqrt{9t^2-4t+1}+3t-1}$$

[分母分子を$t$でわる
$t=\sqrt{t^2}$]

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2}{\sqrt{9-\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}}+3-\frac{1}{t}}=\frac{2}{3+3}=\frac{1}{3}$$