zemis2020-09-04

$\boxed{454\text{の Review}}$

$\boxed{\text{解けない漸化式の極限}}$

$$a_{n+1} = f(a_n)$$
$$-)\ \ \alpha = f(\alpha)$$

$$a_{n+1} - \alpha = f(a_n) - f(\alpha)$$

$= \cdots$ 有理化など（平均値の定理かも）

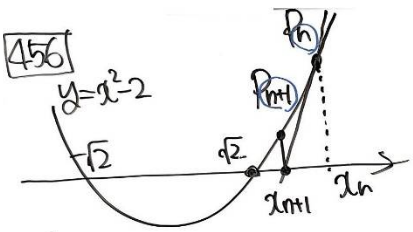
$$= \boxed{\ } (a_n - \alpha)$$

0〜1

$$|a_{n+1} - \alpha| = |\boxed{\ }|\,|a_n - \alpha| \leqq \triangle |a_n - \alpha|$$

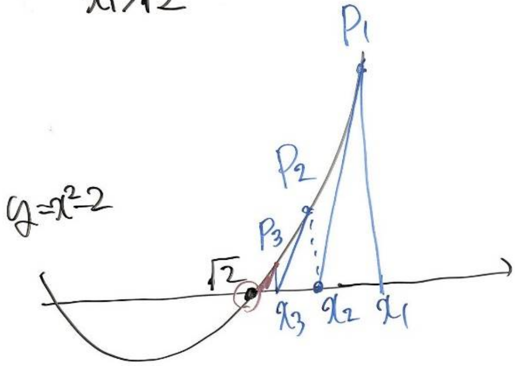
$$0 \leqq |a_n - \alpha| \leqq |a_1 - \alpha| \times \triangle^{n-1} \to 0 \text{（はさみ）}$$

$\boxed{456}$



$P_n(x_n, x_n^2-2)$ とおく.

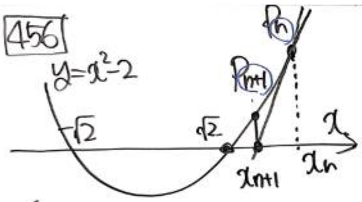
$x_1 > \sqrt{2}$



（ $\boxed{\text{Newton法}}$ この問では $\sqrt{2}$ の近似値が求まる $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$ ）

$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$

$\boxed{456}$



（ $\boxed{\text{Newton法}}$ この問では $\sqrt{2}$ の近似値が求まる $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$ ）

$P_n(x_n, x_n^2-2)$ とおく.

$x_1 > \sqrt{2}$ （ $y' = 2x$ ）

まず.漸化式をつくる

$y = x^2-2$ の P_n での接線は

$$y - (x_n^2 - 2) = 2x_n(x - x_n)$$

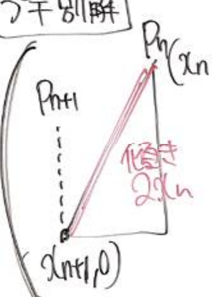
$$\therefore\ y = 2x_n \cdot x - x_n^2 - 2$$

x軸との交点が $(x_{n+1}, 0)$

$$\therefore\ x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{2x_n}$$

同一操作のくり返し ⇨ 漸化式

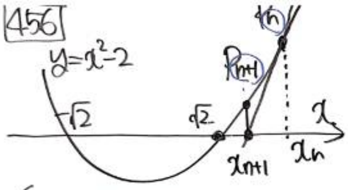
$\boxed{\text{プチ別解}}$



$$\frac{0-(x_n^2-2)}{x_{n+1}-x_n} = 2x_n$$

$$x_{n+1} =$$

$\boxed{456}$



Newton法

この問では $\sqrt{2}$ の近似値が求まる

$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$

$P_n(x_n, x_n^2-2)$ とおく.

$x_1 > \sqrt{2}$ $\quad (y'=2x)$

まず, 漸化式をつくる

$y=x^2-2$ の P_n での接線は

$y-(x_n^2-2)=2x_n(x-x_n)$

$\therefore y = 2x_n\cdot x - x_n^2 - 2$

x軸との交点が $(x_{n+1}, 0)$

$\therefore x_{n+1} = \dfrac{x_n^2+2}{2x_n}$

(1) $\sqrt{2} < x_{n+1} < x_n$ を証明 $\quad$ ($x_n > \sqrt{2}$ かつ $x_n > x_{n+1}$)

(Ⅰ) $x_n > \sqrt{2}$ を証明

(i) $n=1$ のとき成立

(ii) $n=k$ のとき: $x_k > \sqrt{2}$ を仮定

$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{2}{x_k}\right)$

$\geqq \frac{1}{2}\times 2\sqrt{x_k \times \frac{2}{x_k}} = \sqrt{2}$

等号は $x_k = \sqrt{2}$ (不成立)

$x_{k+1} > \sqrt{2}$ $\quad n=k+1$ のときも成立

(Ⅱ) $x_{n+1} < x_n$ を証明

$x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n^2+2}{2x_n} - x_n$

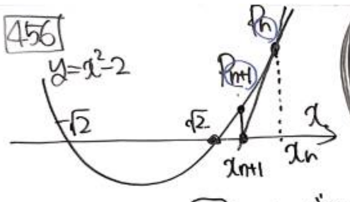
$= \dfrac{x_n^2+2-2x_n^2}{2x_n}$

$= \dfrac{2-x_n^2}{2x_n} < 0$ $\quad$ (Ⅰ)よ

$\therefore x_n > x_{n+1}$

(Ⅰ)(Ⅱ)より 全ての自然数 n で $\sqrt{2} < x_{n+1} < x_n$ ∎

$\boxed{456}$



$\left(\begin{array}{c} P_n(x_n, x_n^2-2) \\ x_1 > \sqrt{2} \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2+2}{2x_n} \end{array}\right)$ (1)のまとめ

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n = \boxed{?}$ ← グラフより答は $\sqrt{2}$

$x_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{x_n^2+2}{2x_n} - \sqrt{2}$

$(n+1)$ 作る

$= \dfrac{x_n^2+2-2\sqrt{2}x_n}{2x_n}$

$= \dfrac{(x_n-\sqrt{2})^2}{2x_n}$ $\quad$ n 必ず出現

$= \dfrac{x_n-\sqrt{2}}{2x_n}\times(x_n-\sqrt{2})$

$|x_{n+1}-\sqrt{2}| = \frac{1}{2}\left|\dfrac{x_n-\sqrt{2}}{x_n}\right|\cdot(x_n-\sqrt{2})$

$\frac{1}{2}\cdot\left|1-\frac{\sqrt{2}}{x_n}\right| < \frac{1}{2}$

$\because$ $x_n > \sqrt{2}$ より $0 < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 < \frac{\sqrt{2}}{x_n} < 1$

$\therefore |x_{n+1}-\sqrt{2}| < \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}|$

これをくり返し用いると

$0 \leqq |x_n - \sqrt{2}| < |x_1 - \sqrt{2}|\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

極限とって

$0 \leqq \lim_{n\to\infty}|x_n-\sqrt{2}| \leqq 0$

はさみうちの原理より

$\lim_{n\to\infty}|x_n-\sqrt{2}| = 0$

$\lim x_n = \sqrt{2}$

$\boxed{チャレ(57)}$ p, q: 正の有理数, $\sqrt{q}$: 無理数

① $(p+\sqrt{q})^n = a_n + b_n\sqrt{q}$

② (1) $(p-\sqrt{q})^n = a_n - b_n\sqrt{q}$ を証明

$a_1 = p,\ b_1 = 1$

漸化式→帰納法

$(n+1)$乗と n乗の比較

$\begin{cases} a_{n+1} = p\cdot a_n + q\cdot b_n \\ b_{n+1} = a_n + p\cdot b_n \end{cases}$

p.199 $\boxed{351}$ Pell方程式が背景

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \sqrt{q}$

を証明 ⇒ 漸化式を ~~求~~ 解く

①, ②より 一般項は求まる

$\boxed{459}$ (3) 補足のつづき

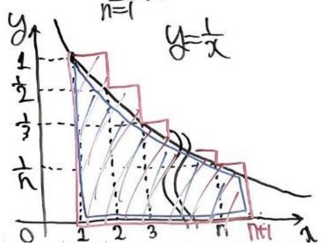
区分求積法と区別せよ ヨコ幅

… (4) 「$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束」は ~~真~~ 偽

反例 $a_n = \frac{1}{n}$ (等差の逆数=調和数列と呼ばれる)

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$ の別証

数列の和=棒グラフの面積とみなして評価 ヨコ幅



$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > \int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx = \Big[\log|x|\Big]_1^{n+1}$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ (大) $>$ (小) $\log(n+1) \to \infty$ $(n\to\infty)$

よって $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \infty$ ∎

456 (1) $x>0$ のとき $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ を証明

$\sqrt{x+1}>0$ より $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}>\sqrt{x}>0$

逆数をとって $0<\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{x}}$ //

(2) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}}$ ← (1)より

$\frac{1}{n}\le\frac{1}{\sqrt{n}}$

$>\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\times\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}$

階差 $=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$

具体化 $=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{1}\right)=\infty$

おいだしの原理より $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\infty$ //

補足 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ も $\boxed{\lim_{n\to\infty}a_n=0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n は収束}$ の反例! (偽)

係数比較でもよい

460 (1) $\frac{1}{n(n+1)(n+3)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+3}$: nの恒等式

分母はらって $1=a(n+1)(n+3)+bn(n+3)+cn(n+1)$

元の分母ゼロ 数値代入

$$\begin{cases} n\to0 & 3a=1 \\ n\to-1 & -2b=1 \\ n\to-3 & 6c=1 \end{cases}$$

$\therefore (a,b,c)=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right)$ ~~階差~~

(2) (1)より $\frac{1}{n(n+1)(n+3)}=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{n}-\frac{3}{n+1}+\frac{1}{n+3}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+3)}$

$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{1}{k+3}\right)$

$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\right.$

2つの階差

ここで $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\overset{差1}{-}\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\to 1\ (n\to\infty)$

また $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}\overset{差2}{-}\frac{1}{k+3}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots$

$\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\to\frac{5}{6}$ ($n\to\infty$ より)

(与式) $=\frac{1}{6}\left(2\times1-\frac{5}{6}\right)=\frac{7}{36}$ //

◎+( )+◎

補足 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ も $\boxed{\lim_{n\to\infty}a_n=0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n は収束}$ の反例! (偽)

係数比較でもよい

460 (1) $\frac{1}{n(n+1)(n+3)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+3}$: nの恒等式

分母はらって $1=a(n+1)(n+3)+bn(n+3)+cn(n+1)$

元の分母ゼロ 数値代入

$$\begin{cases} n\to0 & 3a=1 \\ n\to-1 & -2b=1 \\ n\to-3 & 6c=1 \end{cases}$$

$\therefore (a,b,c)=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right)$ ~~階差~~

(2) (1)より $\frac{1}{n(n+1)(n+3)}=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{n}-\frac{3}{n+1}+\frac{1}{n+3}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+3)}$

$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{1}{k+3}\right)$

$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\right.$

2つの階差

ここで $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\overset{差1}{-}\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\to 1\ (n\to\infty)$

また $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}\overset{差2}{-}\frac{1}{k+3}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots$

$\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\to\frac{5}{6}$ ($n\to\infty$ より)

(与式) $=\frac{1}{6}\left(2\times1-\frac{5}{6}\right)=\frac{7}{36}$ //

◎+( )+◎

461 ← 458 の類題

462 $\sum_{n=1}^{\infty}n\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ かけずらし

1次×等比

463 計算問題のつもりで解く.

464 題意の読みとり.

(いろいろ図を描いたり)

[チャレ(56) 計算問題(略)]