YAWARAKA 先生のテキスト 解答 ⑫６ 数学Ⅱの微分積分

数学Ⅱの微分編

標準問題

【１】$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\left(3x^2-\dfrac{23}{2}x+9\right)$

【２】$k>-11$ のとき２個，$k=-11$ のとき１個，$k<-11$ のとき０個

【３】$a=0, b=-1, c=1$

【４】(1) $a=-\dfrac{3}{2}(\alpha+\beta)$，$b=3\alpha\beta$　(2)　１：２

【５】$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-1$

【６】$-3\sqrt{6}<a<3\sqrt{6}$

【3】

α, β は,

$$f'(x)=9x^2+2ax+b=0$$

の2解だから, (1)より

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{a}{9}=0,\ \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=1$$

$\therefore\ a=0,\ \alpha+\beta=0,\ f(\alpha)+f(\beta)=2$

ここで, $f(x)=3x^3+bx+c$ を $f'(x)=9x^2+b$ で割ると

$$f(x)=\frac{1}{3}xf'(x)+\left(\frac{2b}{3}x+c\right)$$

$$\therefore\ f(\alpha)=\frac{2b}{3}\alpha+c,\ f(\beta)=\frac{2b}{3}\beta+c$$

$$(\because\ f'(\alpha)=f'(\beta)=0)$$

$$\therefore\ f(\alpha)+f(\beta)=\frac{2b}{3}(\alpha+\beta)+2c$$
$$=2c=2$$

$\therefore\ c=1$

$\alpha<\beta$ とすれば $\alpha=-\frac{\sqrt{-b}}{3},\ \beta=\frac{\sqrt{-b}}{3}$

ゆえ, (2)から

$$|f(\alpha)-f(\beta)|=\left|\frac{2b}{3}(\alpha-\beta)\right|$$
$$=\frac{4}{9}(\sqrt{-b})^3=\frac{4}{9}$$

$\therefore\ b=-1$

$\therefore\ a=0,\ b=-1,\ c=1$ ……$\boxed{答}$

【4】

(1) α, β は極値を与える x の値だから,

$$f'(x)=3x^2+2ax+b=0$$

の2つの解である. 解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{2a}{3},\ \alpha\beta=\frac{b}{3}$$

$\therefore\ a=-\frac{3}{2}(\alpha+\beta),\ b=3\alpha\beta$ …$\boxed{答}$

(2) $f(\gamma)=f(\alpha)=k$ とおくと, 方程式 $f(x)-k=0$ は $x=\alpha$ を重解, γ を解としてもち, $f(x)$ の x^3 の係数は1だから

$$f(x)-k=(x-\alpha)^2(x-\gamma)$$

$$\therefore\ f'(x)=2(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)^2$$
$$=(x-\alpha)(3x-2\gamma-\alpha)$$

$f'(\beta)=0$ で $\alpha\fallingdotseq\beta$ ゆえ $3\beta=2\gamma+\alpha$

$\therefore\ 2(\gamma-\beta)=\beta-\alpha$

$\therefore\ (\gamma-\beta):(\beta-\alpha)=1:2$ ……$\boxed{答}$

【6】

(1) $y=x^2$ より

$$y'=2x.$$

$t=0$ のとき，接線の方程式は $y=0$ であるから法線の方程式は $x=0$.

$t\neq 0$ のとき，接線の傾き$=2t$ より，法線の方程式は

$$y-t^2=-\frac{1}{2t}(x-t).$$

$$\therefore\quad y=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}.$$

以上をまとめて，法線の方程式は

$$x+2ty-2t^3-t=0.$$

(2) (1)で求めた法線が $(a,\ 5)$ を通るとき

$$a+10t-2t^3-t=0.$$

$$\therefore\quad a=2t^3-9t. \qquad \cdots①$$

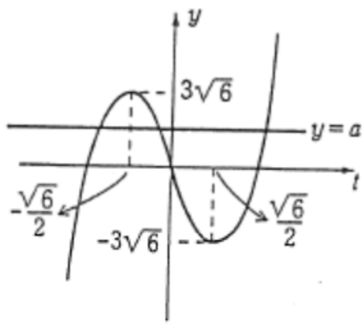
$(a,\ 5)$ を通る法線が3本存在する条件は方程式①が相異なる3実数解をもつことである.

$f(t)=2t^3-9t$ とおくと

$$f'(t)=6t^2-9=6\left(t+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(t-\frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

よって，$f(t)$ の増減およびグラフの概形は次のようになる.

t	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	極大	↘	極小	↗



$$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=3\sqrt{6},\quad f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=-3\sqrt{6}.$$

$y=f(t)$, $y=a$ が相異なる3点で交わるような a の値の範囲を求めて

$$-3\sqrt{6}<a<3\sqrt{6}.$$

発展問題

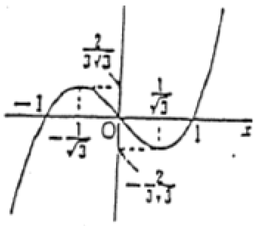
【1】

$\left(t\leqq-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$　$\left(t-1\leqq-\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq t\right)$　$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq t-1\leqq 0\right)$　$(t=1)$　$(1\leqq t)$

区間の右端 t が $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ より左にあるときは $x=t$ で，区間が山の頂上 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ をはさむときは $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ で，区間の左端が $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ より右に出て0より左にあるときは $x=t-1$ で，区間が 0，1 に重なる $t=1$ のときは $x=0,1$ で，これより右に出ると $x=t$ で最大となる．

【解答】 $y=x^3-x$ のとき $y'=3x^2-1$

よって $y=x^3-x$ のグラフは右のようになる．区間 $t-1\leqq x\leqq t$ をずらし，$x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$x=0$ との位置関係を考える．



$g(x)=x^3-x$ とおくと，$f(t)$ は

$t\leqq-\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき　$f(t)=g(t)=t^3-t$　⇦ 右端で最大．

$t-1\leqq-\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq t$　のとき　$f(t)=g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}}$　⇦ 頂上で最大．

$-\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq t-1\leqq 0$ のとき

$$f(t)=g(t-1)=(t-1)^3-(t-1)=t^3-3t^2+2t$$

⇦ 左端で最大．

$1\leqq t$ のとき　$f(t)=g(t)=t^3-t$　⇦ 右端で最大．

よって，$y=f(t)$ のグラフは右下図太線のようになる．

【2】

解答 $g(x)=x^3-3a^2x$ とおく．
$g'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$	0	↘	$-2a^3$	↗

$x\geqq 0$ における $a>0$ のときの増減表は右のようになる．

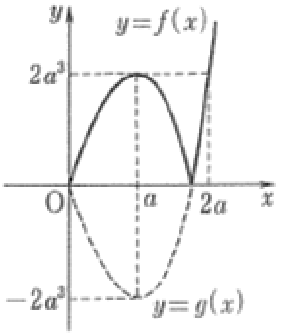
$x^3-3a^2x=2a^3$ を解くと

$$x^3-3a^2x-2a^3=0$$
$$(x+a)^2(x-2a)=0$$

← $x=-a$ は重解となる．

$x\geqq 0$ での解は　$x=2a$

これより，$x\geqq 0$ における $y=f(x)=|g(x)|$ のグラフは右図のようになる．

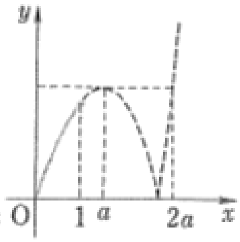


$f(x)$ の定義域は $0\leqq x\leqq 1$ であるから

(i)　$1\leqq a$ のとき

$$M(a)=f(1)=-g(1)=3a^2-1$$

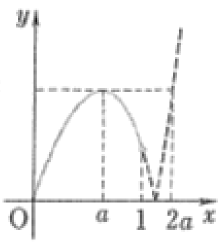
← (i)のとき



(ii)　$a\leqq 1\leqq 2a$ $\left(\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 1\right)$ のとき

$$M(a)=f(a)=-g(a)=2a^3$$

← (ii)のとき

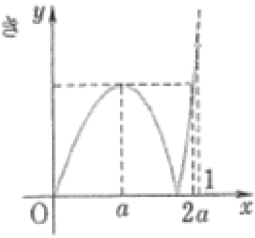


(iii)　$2a\leqq 1$ $\left(0\leqq a\leqq \dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$$M(a)=f(1)=g(1)=1-3a^2$$

（$a=0$ のときも成立する）

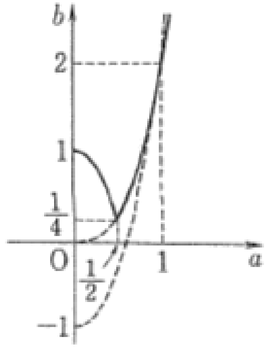
← (iii)のとき



よって，

$$M(a)=\begin{cases}3a^2-1 & (a\geqq 1)\\ 2a^3 & \left(\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 1\right)\\ 1-3a^2 & \left(0\leqq a\leqq \dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$$ ……答

$b=M(a)$ のグラフは右図のようになる．
（$y=3a^2-1$ と $y=2a^3$ のグラフは $a=1$ で接している）



よって，$M(a)$ を最小にする a の値は

$a=\dfrac{1}{2}$　である．　……答

【3】

(1) 方程式 $f(x)=t$ を満たす実数値 x は，xy 平面上で，曲線 $y=f(x)$ ……① と直線 $y=t$ ……② の共有点の x 座標である．

①，②が異なる3つの共有点をもつためには，まず関数 $f(x)$ が極値をもつことが必要で，その条件は，

$f'(x)=3(x^2-a)$ に符号変化が起こること，

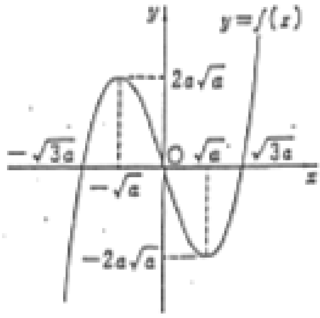
すなわち， $a>0$ ……③ である．

この下に，①のグラフは右のようになるので，①，②が3つの共有点をもつ条件は，

$$-2a\sqrt{a}<t<2a\sqrt{a} \quad \cdots\cdots ④$$

となる．

よって，求める a，t の条件は ③かつ④ である．



(2) $f(f(x))=0$ ……⑤

$\iff f(x)=0$ または $f(x)=\pm\sqrt{3a}$ ……⑥

であるので，方程式⑤が相異なる9個の実数解をもつためには，3つの3次方程式⑥が，それぞれ相異なる3個の実数解をもつことが必要十分となる．

したがって，(1)の結果から，求める条件は，③の下で，

$$\sqrt{3a}<2a\sqrt{a}$$

つまり， $a>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である．

← $f(x)=0 \iff x=0$ または $x=\pm\sqrt{3a}$

← 9個の実数解が互いに異なるのは明らか．

← $a>0$ より，両辺を2乗して $3a<4a^3$ ∴ $a(4a^2-3)>0$ とできる．

【4】

巴 解答 (1) $h(x)$ が極値 1, -1 をとる x の値をそれぞれ α, β とすると，$h(x)-1$ は $x-1$ と $(x-\alpha)^2$ を因数とし，$h(x)+1$ は $x+1$ と $(x-\beta)^2$ を因数とする。

$$h(x)-1=p(x-1)(x-\alpha)^2=p(x-1)(x^2-2\alpha x+\alpha^2)$$
$$h(x)+1=p(x+1)(x-\beta)^2=p(x+1)(x^2-2\beta x+\beta^2)$$

$h(x)$ の x^2, x, 定数の項の係数は

$$p(-1-2\alpha)=p(1-2\beta),\quad p(2\alpha+\alpha^2)=p(-2\beta+\beta^2)$$
$$-p\alpha^2+1=p\beta^2-1$$

よって　$\beta-\alpha=1$, $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta+2)=0$

$$p(\alpha^2+\beta^2)=2$$

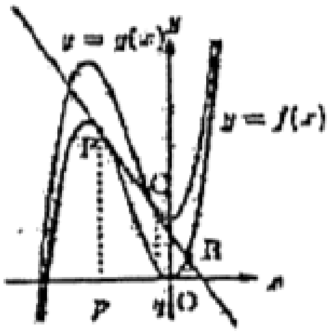
$\therefore\ \alpha+\beta=0$　　$\therefore\ \beta=\dfrac{1}{2},\ \alpha=-\dfrac{1}{2},\ p=4$

したがって　$h(x)=4(x-1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+1$

$\therefore\ h(x)=4x^3-3x$　　……(答)

【5】

【解答】



(1) $g(x)=f(x)+c$, $c>0$ だから, $p\neq q$.

$f'(x)=g'(x)=3x^2+6x$ だから,

$3p^2+6p=3q^2+6q$. $\therefore\ (p-q)(p+q+2)=0$.

$p\neq q$ より $q=-(p+2)$.

直線 l が点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ で曲線 $y=f(x)$ に接しているから, l の方程式は

$l:y-(p^3+3p^2)=(3p^2+6p)(x-p)$. $\therefore\ l:y=3p(p+2)x-2p^3-3p^2$. …①

直線 l が点 $\mathrm{Q}(q,\ g(q))$ で曲線 $y=g(x)$ に接しているから, l の方程式は

$l:y-(q^3+3q^2+c)=(3q^2+6q)(x-q)$. $\therefore\ l:y=3q(q+2)x-2q^3-3q^2+c$.
…②

$q=-(p+2)$ より, ①, ② の定数項を比較して,

$$-2p^3-3p^2=2(p+2)^3-3(p+2)^2+c.$$

$$\therefore\ c=-4(p+1)^3. \qquad \cdots(答)$$

(2) 曲線 $y=f(x)$ と l の交点の x 座標は,

$$x^3+3x^2=3p(p+2)x-2p^3-3p^2$$

の解.

$$\therefore\ (x-p)^2(x+2p+3)=0.$$

P 以外の交点 R の x 座標は $-2p-3$.

P, Q, R は l 上の点でその x 座標は p, $-p-2$, $-2p-3$. $c>0$ より,
$p\neq -1$.

$$\therefore\ \mathrm{PQ}:\mathrm{QR}=|p-(-p-2)|:|(-p-2)-(-2p-3)|=2:1. \qquad \cdots(答)$$