試験時間60分　　解答は解答用紙に書いて、提出してください

$\boxed{1}$ 関数 $y=\sin^3 2x$ を微分せよ。

$\boxed{2}$ $y=e^x\sin x$ とすると，$y''=\boxed{}$ である．

$\boxed{3}$ 関数 $y=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ の導関数を求めよ。

$\boxed{4}$ x について微分可能な関数 y が条件 $x\tan y=1$ を満たしているとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を x で表せ。

$\boxed{5}$ 曲線 $2x^2-2xy+y^2=5$ 上の点 $(1,\ 3)$ における接線の方程式を求めよ。

$\boxed{6}$ 曲線 $y=x^{\sin x}$ 上で，$x=\pi$ である点における接線の y 切片を求めよ。

$\boxed{7}$ t を媒介変数として，$\begin{cases} x=e^t \\ y=e^{-t^2} \end{cases}$ で表される曲線を C とする。ここで，e は自然対数の底である。

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の式で表せ。

(2) 曲線 C 上の $t=1$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。

$\boxed{8}$ 2 曲線 $y=ax^3$ と $y=3\log x$ が共有点をもち，その点における 2 曲線の接線が一致しているとき，a の値を求めよ．また，その共有点における接線の方程式を求めよ．ただし，log は自然対数である．

$\boxed{9}$ $f(x)=\log\dfrac{1+x}{1-x}$ $(-1<x<1)$ とする．

(1) $f(x)$ は奇関数であることを示せ．

(2) 導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\frac{1+x}{1-x}$ の値を求めよ．

$\boxed{10}$ 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{\sin x-x}=\boxed{}$$

$\boxed{11}$ 数列 $a_1=\sqrt{2}$，$a_2=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$，$a_3=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$，$a_4=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}}$，…… は漸化式 $a_{n+1}=(\sqrt{2})^{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たしている。$f(x)=(\sqrt{2})^x$ として，次の問いに答えよ。

(1) $0\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq 2$ における $f'(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

(3) $0<a_n<2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成立することを数学的帰納法を用いて示せ。

(4) $0<2-a_{n+1}<(\log 2)(2-a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成立することを示せ。

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

$\boxed{1}$ 解答　$y'=6\sin^2 2x\cos 2x$

$\boxed{2}$ 解答　$2e^x\cos x$

$\boxed{3}$ 解答　$y'=\dfrac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$

$\boxed{4}$ 解答　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{x^2+1}$

$\boxed{5}$ 解答　$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

$\boxed{6}$ 解答　$\pi\log\pi+1$

$\boxed{7}$ 解答　(1)　$\dfrac{dy}{dx}=-2te^{-t^2-t}$　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=(4t^2+2t-2)e^{-t^2-2t}$　　(2)　$y=-\dfrac{2}{e^2}x+\dfrac{3}{e}$

$\boxed{8}$ 解答　$a=\dfrac{1}{e}$，$y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{e}}x-2$

$\boxed{9}$ 解答　(1)　略　　(2)　$f'(x)=\dfrac{2}{1-x^2}$　　(3)　2

$\boxed{10}$ 解答　-1

$\boxed{11}$ 解答　(1)　$x=2$ で最大値 2，$x=0$ で最小値 1

(2)　$x=2$ で最大値 $\log 2$，$x=0$ で最小値 $\dfrac{1}{2}\log 2$

(3)　略

(4)　略

(5)　2

$\boxed{1}$ $y'=3\sin^2 2x\cdot 2\cos 2x=6\sin^2 2x\cos 2x$

$\boxed{2}$ $y'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$　より、

$y''=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$

$\quad =2e^x\cos x$

$\boxed{3}$ $y'=\dfrac{\cos x(\sin x+\cos x)-\sin x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}=\dfrac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$

$\boxed{4}$ $x\tan y=1$ から　$\tan y=\dfrac{1}{x}$　……①

①の両辺を x で微分すると　$\dfrac{1}{\cos^2 y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{x^2}$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{x^2}\cos^2 y=-\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\tan^2 y}=-\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}=-\dfrac{1}{x^2+1}$

$\boxed{5}$ $2x^2-2xy+y^2=5$ の両辺を x で微分すると　$4x-2(y+xy')+2yy'=0$

ゆえに　$y'(y-x)+2x-y=0$　　$x=1$，$y=3$ のとき　$y'=\dfrac{1}{2}$

よって，求める接線の方程式は　$y-3=\dfrac{1}{2}(x-1)$　すなわち　$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

$\boxed{6}$ $y=x^{\sin x}$ $(x>0)$ の両辺の自然対数をとると　$\log y=\sin x\log x$

この両辺を x について微分すると　$\dfrac{y'}{y}=\cos x\log x+\dfrac{\sin x}{x}$

すなわち　$y'=x^{\sin x}\left(\cos x\log x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$

$x=\pi$ のとき $y=1$，$y'=-\log\pi$ であるから，$x=\pi$ である点における接線の方程式は

$y-1=(-\log\pi)(x-\pi)$

$x=0$ を代入して整理すると　$y=\pi\log\pi+1$

よって，この接線の y 切片は　$\pi\log\pi+1$

$\boxed{7}$ (1)　$\dfrac{dx}{dt}=e^t$，$\dfrac{dy}{dt}=-2te^{-t^2}$　　$\dfrac{dx}{dt}=e^t>0$ であるから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2te^{-t^2}}{e^t}=-2te^{-t^2-t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(-2te^{-t^2-t}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\left\{-2e^{-t^2-t}+(-2t)\cdot(-2t-1)e^{-t^2-t}\right\}\cdot\frac{1}{e^t}$$

$$=(4t^2+2t-2)e^{-t^2-2t}$$

(2)　$t=1$ のとき　$x=e$，$y=\dfrac{1}{e}$，$\dfrac{dy}{dx}=-2e^{-2}=-\dfrac{2}{e^2}$

よって，求める接線の方程式は　$y-\dfrac{1}{e}=-\dfrac{2}{e^2}(x-e)$

すなわち　$y=-\dfrac{2}{e^2}x+\dfrac{3}{e}$

$\boxed{8}$ $f(x)=ax^3$，$g(x)=3\log x$ とすると　$f'(x)=3ax^2$，$g'(x)=\dfrac{3}{x}$

2 曲線の共有点の x 座標を p とすると，$f(p)=g(p)$ であるから

$$ap^3=3\log p \cdots\cdots ①$$

2 曲線の共有点における接線が一致するから，$f'(p)=g'(p)$ より

$$3ap^2=\frac{3}{p}\quad \text{すなわち}\quad ap^3=1 \cdots\cdots ②$$

①，② から　$3\log p=1$　　よって　$p=e^{\frac{1}{3}}$

これを ② に代入して　$ae=1$　　ゆえに　$a=\dfrac{1}{e}$

共有点の座標は　$\left(e^{\frac{1}{3}},\ 1\right)$ であるから，求める接線の方程式は

$$y-1=\frac{3}{e^{\frac{1}{3}}}\left(x-e^{\frac{1}{3}}\right)\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{3}{\sqrt[3]{e}}x-2$$

$\boxed{9}$ (1)　$f(-x)=\log\dfrac{1-x}{1+x}=\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\log\dfrac{1+x}{1-x}=-f(x)$

ゆえに，$f(x)$ は奇関数である．

(2)　$-1<x<1$ から　$1+x>0$，$1-x>0$

よって　$f(x)=\log(1+x)-\log(1-x)$

ゆえに　$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{-1}{1-x}$

$$=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{(1-x)+(1+x)}{(1+x)(1-x)}=\frac{2}{1-x^2}$$

(3)　$f(0)=\log 1=0$ から　与式$=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

(2) から　$f'(0)=\dfrac{2}{1-0^2}=2$　　よって，求める値は　2

$\boxed{10}$ $f(x)=\sin x$ とおく。$f(x)$ は常に微分可能であり　　$f'(x)=\cos x$

平均値の定理により

$$\frac{f(x)-f(\sin x)}{x-\sin x}=f'(c),\quad \sin x<c<x \quad \text{または}\quad x<c<\sin x$$

を満たす実数 c が存在する。

$x\longrightarrow 0$ のとき，$\sin x\longrightarrow 0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to 0}c=0$

よって　(与式)$=\displaystyle\lim_{x\to 0}\left\{-\frac{f(x)-f(\sin x)}{x-\sin x}\right\}=\lim_{x\to 0}\{-f'(c)\}=\lim_{x\to 0}(-\cos c)$

$=-\cos 0=-1$

$\boxed{11}$ (1)　底 $\sqrt{2}$ は1より大きいから，関数 $f(x)$ は単調に増加する。

よって，$0 \leqq x \leqq 2$ のとき，$f(x)$ は $x=2$ で最大値2，$x=0$ で最小値1をとる。

(2)　$f'(x)=(\sqrt{2})^x \log\sqrt{2}$

よって，$f'(x)$ は単調に増加するから，$0 \leqq x \leqq 2$ のとき，$f'(x)$ は

$x=2$ で最大値 $\log 2$，$x=0$ で最小値 $\dfrac{1}{2}\log 2$ をとる。

(3)　「$0<a_n<2$」を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき

$a_1=\sqrt{2}$ であるから，$n=1$ のとき ① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち $0<a_k<2$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき　　$a_{k+1}=(\sqrt{2})^{a_k}$

(1) から，$0<a_k<2$ のとき　　$f(0)<f(a_k)<f(2)$

すなわち　　$(\sqrt{2})^0<(\sqrt{2})^{a_k}<(\sqrt{2})^2$　　　よって　　$1<a_{k+1}<2$

したがって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，① はすべての自然数 n に対して成り立つ。

(4)　(3) から $0<2-a_{n+1}$ は成り立つ。

区間 $[a_n,\ 2]$ において，$f(x)=(\sqrt{2})^x$ に平均値の定理を用いると

$$\frac{f(2)-f(a_n)}{2-a_n}=f'(c_n)\ \ (a_n<c_n<2)$$

を満たす c_n が存在する。

(2) から，$a_n<c_n<2$ のとき　　$f'(c_n)<\log 2$

また，$f(2)=2$，$f(a_n)=a_{n+1}$ であるから　　$\dfrac{2-a_{n+1}}{2-a_n}<\log 2$

$2-a_n>0$ から　　$2-a_{n+1}<(\log 2)(2-a_n)$

以上から　　　　$0<2-a_{n+1}<(\log 2)(2-a_n)$

(5)　(4) から　　$0<2-a_n<(\log 2)(2-a_{n-1})<\cdots\cdots<(\log 2)^{n-1}(2-a_1)$

$0<\log 2<1$ から　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\log 2)^{n-1}(2-a_1)=0$

はさみうちの原理により　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2-a_n)=0$　　　よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=2$