試験時間60分

$\boxed{1}$ x, y, z が $x+2y+3z=6$ を満たすとき，$x^2+4y^2+9z^2$ の最小値とそのときの x, y の値を求めよ．

$\boxed{2}$ 100 人の集まりがあり，この中から 5 名の代表者を選ぶ。100 人が 1 名ずつ名前を書いて投票するとき，当選が確実となる最低票数は何票か。

$\boxed{3}$ 次の (1) ～ (3) の文章中にある $\boxed{}$ に入る最も適当なものを，下の選択肢 (ア) ～ (エ) の中から 1 つ選べ。

(1)　2 つの三角形 ABC と DEF が合同であることは，2 つの三角形の面積が等しいための $\boxed{}$ 。

(2)　$a<0$ であることは，x の 2 次方程式 $x^2+(2a-3)x+a^2-3a+2=0$ の 2 つの実数解がともに正であるための $\boxed{}$ 。

(3)　どちらか一方は 0 でない実数 a，b において，2 つの直線 $ax+by=3$ と $bx-ay=1$ の交点が第 1 象限に存在することは，$a>0$ かつ $b>0$ であるための $\boxed{}$ 。

(ア)　必要条件である　　(イ)　十分条件である

(ウ)　必要十分条件である　　(エ)　必要条件でも十分条件でもない

$\boxed{4}$ 次の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪ ～ ③ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

自然数 m，n について，条件 p，q，r を次のように定める。

p：$m+n$ は 2 で割り切れる

q：n は 4 で割り切れる

r：m は 2 で割り切れ，かつ n は 4 で割り切れる

また，条件 p の否定を $\overline{p}$，条件 r の否定を $\overline{r}$ で表す。このとき

p は r であるための $\boxed{\text{ア}}$。

$\overline{p}$ は $\overline{r}$ であるための $\boxed{\text{イ}}$。

「p かつ q」は r であるための $\boxed{\text{ウ}}$。

「p または q」は r であるための $\boxed{\text{エ}}$。

⓪　必要十分条件である　　①　必要条件であるが，十分条件でない

②　十分条件であるが，必要条件でない　　③　必要条件でも十分条件でもない

$\boxed{5}$ 不等式 $-x^2+a<y<x^4-3x^2+1$ …… ①　について，次の各条件が成り立つような a の範囲を，それぞれ求めよ．

(1)　① が x の値にかかわらずに成り立つような y が存在する．

(2)　x がどのように与えられても，その x に対して ① が成り立つような y が存在する．

(3)　y がどのように与えられても，その y に対して ① が成り立つような x が存在する．

$\boxed{6}$ 次のように2種類の演算⊕，∘ を定義する。

任意の数 x，y に対して　　$x \oplus y = x + y + 1$，$x \circ y = x(y+1)$

(1)　この定義にしたがって次の値を求めよ。

（ア）$(3 \oplus 4) \oplus 5$　　（イ）$(3 \circ 4) \circ 5$　　（ウ）$3 \circ (4 \oplus 5)$

(2)　①，②，③ の各式について以下の (A)，(B)，(C) のどの場合にあてはまるかをそれぞれ記せ。結果のみで良い。

①　$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$　　②　$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

③　$a \circ (b \oplus c) = (a \circ b) \oplus (a \circ c)$

(A)　任意の数 a，b，c に対して成立する。

(B)　どんな数 a，b，c に対しても成立しない。

(C)　成立する場合もあるし，成立しない場合もある。

$\boxed{7}$ a, b, c を正の数とするとき，$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geqq kabc$ が常に成り立つような定数 k の最大値を求めよ.

$\boxed{8}$ 【記述式】

正の数 a, b, c について，次のことを示せ.

(1)　$a + \dfrac{1}{a} \geqq 2$

(2)　$a + b \geqq 4$ ならば，$a \geqq 2$ または $b \geqq 2$ である.

(3)　3つの数 $a + \dfrac{1}{b}, b + \dfrac{1}{c}, c + \dfrac{1}{a}$ のうち少なくとも1つは2以上である.

$\boxed{9}$ ＊　直線 $x + 2y = 3$ が双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ によって切り取られる弦について，その中点の座標および長さを求めよ。

$\boxed{1}$ 解答　$x=2, y=1$ のとき最小値 12

$\boxed{2}$ 解答　17票

$\boxed{3}$ 解答　(1)（イ）　(2)（イ）　(3)（エ）

$\boxed{4}$ 解答　（ア）❶　（イ）❷　（ウ）⓿　（エ）❶

$\boxed{5}$ 解答　(1)　$a < -\dfrac{5}{4}$　　(2)　$a < 0$　　(3)　実数全体

$\boxed{6}$ 解答　(1)（ア）14　（イ）90　（ウ）33

(2)　①　(A)　②　(C)　③　(B)

$\boxed{7}$ 解答　9

$\boxed{8}$ 解答　[略]

$\boxed{9}$ 解答　中点 $(-1,\ 2)$，弦の長さ $\dfrac{4\sqrt{15}}{3}$

1 $3z=6-x-2y$ であるから

$$\begin{aligned} x^2+4y^2+9z^2 &= x^2+4y^2+(6-x-2y)^2 \\ &= 2x^2+4xy+8y^2-12x-24y+36 \\ &= 2x^2+4(y-3)x+8y^2-24y+36 \\ &= 2\{x+(y-3)\}^2+6y^2-12y+18 \\ &= 2\{x+(y-3)\}^2+6(y-1)^2+12 \end{aligned}$$

よって　$x^2+4y^2+9z^2 \geqq 12$

等号は，$x+y-3=0,\ y-1=0$ すなわち $x=2,\ y=1$ のときに成り立つ.

答　$x=2,\ y=1$ のとき最小値 12

別解　実数 a, b, c, x, y, z に対して，次の不等式が成り立つ.

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$$

等号は，$ay=bx,\ bz=cy,\ cx=az$ のときに成り立つ.

よって　$(1^2+1^2+1^2)(x^2+4y^2+9z^2) \geqq (x+2y+3z)^2=36$

ゆえに　$x^2+4y^2+9z^2 \geqq 12$

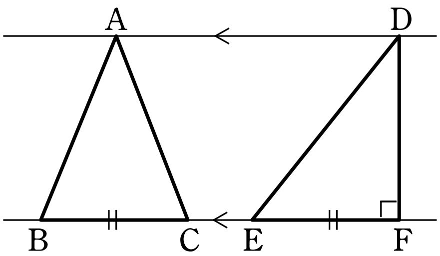
等号は，$\dfrac{x}{1}=\dfrac{2y}{1}=\dfrac{3z}{1}$ かつ $x+2y+3z=6$ のときに成り立つ.

これを解いて　$x=2,\ y=1,\ z=\dfrac{2}{3}$

以上から，$x^2+4y^2+9z^2$ は $x=2,\ y=1,\ z=\dfrac{2}{3}$ のとき最小値 12　答

2 特定の 6 人に均等に票が分かれたとすると，票数は (17，17，17，17，16，16) となる。
もし 15 票以下になると，その人を上回る票を得た人が 5 人いることがあり，当選できない場合が起こりうる。
一方，17 票以上を保持していれば，他の票がどう動いても，その人を上回る票を得た人は多くても 4 人である。
よって，求める最低票数は　17 票

3 (1)「$\triangle ABC \equiv \triangle DEF \Longrightarrow \triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の面積が等しい」は真である。
また，「$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の面積が等しい $\Longrightarrow \triangle ABC \equiv \triangle DEF$」は偽である。
(反例)：右の図の $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$
よって，十分条件である。
したがって　(イ)



BC＝EF，AD∥BF

(2)　与えられた 2 次方程式を ① とする。

① から　$x^2+(2a-3)x+(a-1)(a-2)=0$

すなわち　$(x+a-1)(x+a-2)=0$

よって，① の解は　$x=-a+1,\ -a+2$

$a<0$ のとき，$-a+1>0,\ -a+2>0$ であるから，
「$a<0 \Longrightarrow$ 2 次方程式 ① の 2 つの実数解がともに正である」は真である。
また，「2 次方程式 ① の 2 つの実数解がともに正である $\Longrightarrow a<0$」は偽である。

(反例：$a=0$)

よって，十分条件である。

したがって　(イ)

(3)　2 直線の交点の座標は，連立方程式 $\begin{cases} ax+by=3 & \cdots\cdots ① \\ bx-ay=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ の解 $(x,\ y)$ で与えられる。

①×a＋②×b から　　$(a^2+b^2)x=3a+b$

$a^2+b^2 \fallingdotseq 0$ であるから　　$x=\dfrac{3a+b}{a^2+b^2}$

①×b－②×a から　　$(a^2+b^2)y=3b-a$

$a^2+b^2 \fallingdotseq 0$ であるから　　$y=\dfrac{3b-a}{a^2+b^2}$

よって，2 直線の交点の座標は　$\left(\dfrac{3a+b}{a^2+b^2},\ \dfrac{3b-a}{a^2+b^2}\right)$

これが第 1 象限に存在するための必要十分条件は

$$3a+b>0 \text{ かつ } 3b-a>0 \quad \cdots\cdots ③$$

$a=-1$，$b=4$ のとき，③ は成り立つが，$a>0$ でない。

ゆえに，「③ $\Longrightarrow$ $a>0$ かつ $b>0$」は偽である。

また，$a=4$，$b=1$ のとき，$a>0$ かつ $b>0$ であるが，$3b-a>0$ でない。

ゆえに，「$a>0$ かつ $b>0$ $\Longrightarrow$ ③」は偽である。

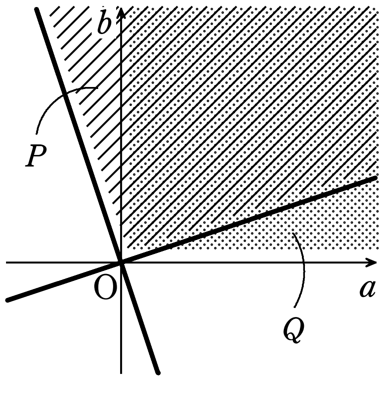
よって，必要条件でも十分条件でもない。

したがって　(エ)

別解　ab 平面上で，③ が表す領域を P，$(a>0$ かつ $b>0)$ が表す領域を Q とすると，P と Q は右の図のようになり，$P\subset Q$，$P\supset Q$ がともに成り立たない。

よって，③ は $(a>0$ かつ $b>0)$ であるための必要条件でも十分条件でもない。

したがって　(エ)



$\boxed{4}$ (ア)　命題 $p \Longrightarrow r$ は偽である。(反例)　$m=3$，$n=1$

命題 $r \Longrightarrow p$ は真である。

(証明)　m が 2 で割り切れ，かつ n が 4 で割り切れるならば，

$m=2k$，$n=4l$　(k，l は自然数)　と表される。

このとき　　$m+n=2k+4l=2(k+2l)$

よって，$m+n$ は 2 で割り切れる。(証明終)

したがって，p は r であるための必要条件であるが，十分条件でない。(ア ①)

(イ)　命題 $r \Longrightarrow p$ が真であるから，その対偶である命題 $\overline{p} \Longrightarrow \overline{r}$ も真である。

命題 $p \Longrightarrow r$ が偽であるから，その対偶である命題 $\overline{r} \Longrightarrow \overline{p}$ も偽である。

したがって，$\overline{p}$ は $\overline{r}$ であるための十分条件であるが，必要条件でない。(イ ②)

(ウ) 「p かつ q」は次のような条件である。

$m+n$ は 2 で割り切れ，かつ n は 4 で割り切れる。

命題「p かつ q」$\Longrightarrow r$ は真である。

(証明) $m+n$ が 2 で割り切れ，かつ n が 4 で割り切れるならば，

$m+n=2k$，$n=4l$ (k，l は自然数) と表される。

このとき $m=2k-4l=2(k-2l)$

よって，m は 2 で割り切れる。(証明終)

命題 $r \Longrightarrow p$ が真であり，命題 $r \Longrightarrow q$ も明らかに真であるから，

命題 $r \Longrightarrow$「p かつ q」は真である。

したがって，「p かつ q」は r であるための必要十分条件である。(ウ ⓪)

(エ) 「p または q」は次のような条件である。

$m+n$ は 2 で割り切れる，または n は 4 で割り切れる。

命題「p または q」$\Longrightarrow r$ は偽である。(反例) $m=3$，$n=1$

命題 $r \Longrightarrow p$ が真であるから，命題 $r \Longrightarrow$「p または q」は真である。

したがって，「p または q」は r であるための必要条件であるが，十分条件でない。

(エ ①)

$\boxed{5}$ $f(x)=-x^2+a$，$g(x)=x^4-3x^2+1$ とする.

(1) { $f(x)$ の最大値 }<{ $g(x)$ の最小値 } となればよい.

$f(x)$ の最大値は a

$g(x)$ の最小値は $g(x)=\left(x^2-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$ から $-\dfrac{5}{4}$ 　よって $a<-\dfrac{5}{4}$

(2) $f(x)<g(x)$ がすべての x について成り立てばよい.

$h(x)=g(x)-f(x)$ とおくと

$$h(x)=x^4-2x^2+1-a=(x^2-1)^2-a$$

{ $h(x)$ の最小値 }>0 となればよいから $-a>0$ 　ゆえに $a<0$

(3) y がどのように与えられても，x が十分大きいときは，① が成り立つ.

よって，求める a の値の範囲は実数全体.

$\boxed{6}$

(1) (ア) $3\oplus4=3+4+1=8$

よって $(3\oplus4)\oplus5=8\oplus5=8+5+1=14$

(イ) $3\circ4=3(4+1)=15$

よって $(3\circ4)\circ5=15\circ5=15(5+1)=90$

(ウ) $4\oplus5=4+5+1=10$

よって $3\circ(4\oplus5)=3\circ10=3(10+1)=33$

(2) ① $(a\oplus b)\oplus c=(a+b+1)\oplus c=(a+b+1)+c+1=a+b+c+2$

$a\oplus(b\oplus c)=a\oplus(b+c+1)=a+(b+c+1)+1=a+b+c+2$

よって，① は任意の数 a，b，c に対して成立するから　(A)

② $(a\circ b)\circ c=a(b+1)\circ c=a(b+1)(c+1)=a(bc+b+c+1)$

$a\circ(b\circ c)=a\circ\{b(c+1)\}=a\{b(c+1)+1\}=a(bc+b+1)$

よって，② は $a=0$ または $c=0$ のとき成立し，$a\neq 0$ かつ $c\neq 0$ のとき成立しないから　(C)

③ $a\circ(b\oplus c)=a\circ(b+c+1)=a(b+c+2)$

$(a\circ b)\oplus(a\circ c)=\{a(b+1)\}\oplus\{a(c+1)\}=a(b+1)+a(c+1)+1=a(b+c+2)+1$

よって，③ はどんな数 a，b，c に対しても成立しないから　(B)

$\boxed{7}$ $a=b=c=1$ のときも不等式は成り立たなければならないから

$3\cdot 3\geqq k$　　　ゆえに　$k\leqq 9$

$k=9$ とすると

$(a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc$

$$
\begin{aligned}
&=a^2b+ca^2+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a-6abc\\
&=a(b^2+c^2-2bc)+b(c^2+a^2-2ca)+c(a^2+b^2-2ab)\\
&=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\geqq 0
\end{aligned}
$$

したがって，$k=9$ は適する．

ゆえに，求める k の最大値は　9

$\boxed{8}$ (1) $a>0$ であるから，(相加平均) ≧ (相乗平均) により

$a+\dfrac{1}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{a}}=2$　(等号は $a=1$ のとき成り立つ)

(2) 対偶は「$a<2$ かつ $b<2$ ならば，$a+b<4$ である．」

これは明らかに真であるから，もとの命題も真である．

したがって　$a+b\geqq 4$ ならば，$a\geqq 2$ または $b\geqq 2$ である．

(3) 背理法で証明．$a+\dfrac{1}{b}, b+\dfrac{1}{c}, c+\dfrac{1}{a}$ のすべてが 2 より小さいと仮定すると

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{c}\right)+\left(c+\frac{1}{a}\right)<6 \cdots\cdots ①$$

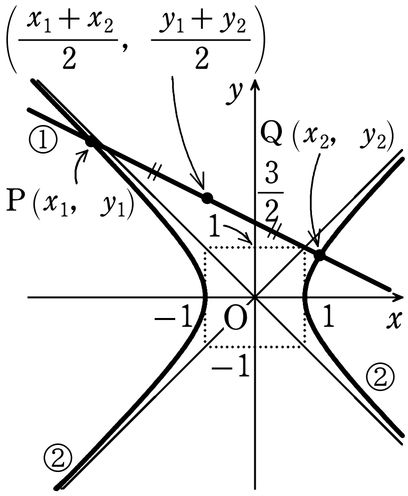
ここで，(1) から　$a+\dfrac{1}{a}\geqq 2, b+\dfrac{1}{b}\geqq 2, c+\dfrac{1}{c}\geqq 2$

これらを辺々加えると　$a+\dfrac{1}{a}+b+\dfrac{1}{b}+c+\dfrac{1}{c}\geqq 6$

変形して　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)+\left(b+\dfrac{1}{c}\right)+\left(c+\dfrac{1}{a}\right)\geqq 6$　　これは ① に反する．

ゆえに，$a+\dfrac{1}{b}, b+\dfrac{1}{c}, c+\dfrac{1}{a}$ のうち少なくとも 1 つは 2 以上である．

9 $x+2y=3$ ……①，$x^2-y^2=1$ ……② とする。



① から　　$x=3-2y$ ……③

③ を ② に代入すると　　$(3-2y)^2-y^2=1$

よって　　$3y^2-12y+8=0$ ……④

直線 ① と双曲線 ② の 2 つの交点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ とすると，y_1，y_2 は 2 次方程式 ④ の 2 つの解である。

ここで，④ において解と係数の関係から

$$y_1+y_2=4 \ \cdots\cdots⑤,\quad y_1y_2=\frac{8}{3}$$

③ より，$x_1=3-2y_1$，$x_2=3-2y_2$ であるから，

求める弦の中点の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right) \quad すなわち \quad \left(3-(y_1+y_2),\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

⑤ を代入して　　$(-1,\ 2)$　　　　また，弦の長さについて

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=\{(3-2y_2)-(3-2y_1)\}^2+(y_2-y_1)^2\\&=\{-2(y_2-y_1)\}^2+(y_2-y_1)^2=5(y_2-y_1)^2=5\{(y_2+y_1)^2-4y_1y_2\}\\&=5\left(4^2-4\cdot\frac{8}{3}\right)=\frac{4^2\cdot 5}{3}\end{aligned}$$

$\mathrm{PQ}>0$ であるから　　$\mathrm{PQ}=\sqrt{\dfrac{4^2\cdot 5}{3}}=\dfrac{4\sqrt{15}}{3}$