談話室マロニエ　数学小テスト　⑫６－２　Ⅱの積分

試験時間60分　　解答は<u>解答用紙</u>に書いて、提出してください

1　p，q を定数とする。定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2+px-q)^2dx$ は，$p=$ ア$\boxed{}$，$q=$ イ$\boxed{}$ で最小値をとる。空欄を埋めよ。ただし，１桁の整数とは限らない。

2　$\displaystyle\int_{-1}^{3}(|x|-1)^2dx$ を求めよ。

3　xy 平面上で，連立不等式 $\begin{cases} |x|\leqq 2, \\ y\geqq x, \\ y\leqq \left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2 \end{cases}$ を満たす領域の面積を求めよ。

4　次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 C の値を求めよ。

$$\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^1 (x+t)^2 f'(t)\,dt=x^2+C$$

5　$f(x)=x^4+2x^3-2x^2$ として，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ の増減と極値を調べ，グラフをかけ。

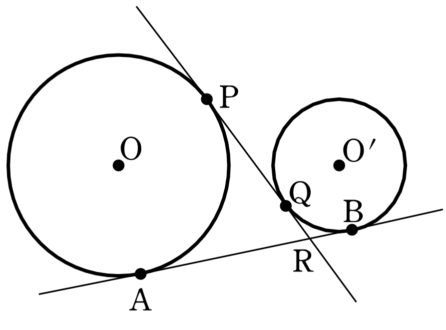
(2)　曲線 $y=f(x)$ に２点で接する直線の方程式を求めよ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と (2) で求めた直線 $y=g(x)$ とで囲まれる部分の面積を S とする。

S の値を求めよ。必要に応じて $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2dx=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$ を使ってよい。

6　＊　下の図において，直線 AB は円 O，O′ にそれぞれ点 A，B で接していて，直線 PQ は円 O，O′ にそれぞれ点 P，Q で接している。直線 AB と直線PQ の交点を R とする。円 O，O′ の半径をそれぞれ r，r' とする。ただし，$r>r'$ である。中心 O，O′ 間の距離が７で，AB＝5，PQ＝3 であるとき，r，r' の大きさは $r=$ ア$\boxed{}$，$r'=$ イ$\boxed{}$ であり，線分 AR の長さは AR＝ ウ$\boxed{}$ である。

空欄を埋めよ。ただし，１桁の整数とは限らない。



7　＊　$\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{1}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}}+\cdots\cdots+\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n+1}+\sqrt[4]{n}}$ を簡単にせよ。

8　＊　１から６までの数字が１つずつ書かれている６枚のカードがある。これらをよくかきまぜた上で，左から右に１列に並べる。カードに書かれた数字を左から順に a，b，c，d，e，f とする。

(1)　$a+b=c$ となる確率を求めよ。

(2)　$a+b=c+d$ となる確率を求めよ。

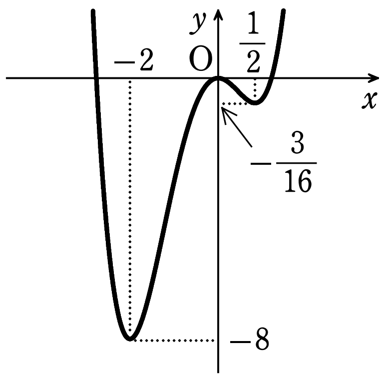
$\boxed{1}$ 解答 (ア) 0　(イ) $\dfrac{1}{3}$

$\boxed{2}$ 解答 $\dfrac{10}{3}$

$\boxed{3}$ 解答 $\dfrac{64}{27}$

$\boxed{4}$ 解答 $f(x)=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}$，$C=\dfrac{2}{9}$

$\boxed{5}$ 解答 (1) $x=-2$ のとき極小値 -8,
$x=0$ のとき極大値 0,
$x=\dfrac{1}{2}$ のとき極小値 $-\dfrac{3}{16}$,〔図〕



(2) $y=3x-\dfrac{9}{4}$　(3) $\dfrac{49\sqrt{7}}{30}$

$\boxed{6}$ 解答 (ア) $\sqrt{10}+\sqrt{6}$　(イ) $\sqrt{10}-\sqrt{6}$　(ウ) 4

$\boxed{7}$ 解答 $\sqrt[4]{n+1}-1$

$\boxed{8}$ 解答 (1) $\dfrac{1}{10}$　(2) $\dfrac{7}{45}$

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2+px-q)^2dx=\int_{-1}^{1}\{x^4+2px^3+(p^2-2q)x^2-2pqx+q^2\}dx$

$$=2\int_{0}^{1}\{x^4+(p^2-2q)x^2+q^2\}dx=2\left[\frac{x^5}{5}+\frac{1}{3}(p^2-2q)x^3+q^2x\right]_0^1$$

$$=2\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}(p^2-2q)+q^2\right\}=\frac{2}{3}p^2+2q^2-\frac{4}{3}q+\frac{2}{5}$$

$$=\frac{2}{3}p^2+2\left(q-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{45}$$

よって，この定積分は $p={}^{ア}0$，$q={}^{イ}\dfrac{1}{3}$ で最小値をとる。

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_{-1}^{3}(|x|-1)^2dx=\int_{-1}^{3}(x^2-2|x|+1)dx$

$$=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)dx+\int_{0}^{3}(x^2-2x+1)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_{0}^{3}$$

$$=-\left(-\frac{1}{3}+1-1\right)+(9-9+3)=\frac{10}{3}$$

$\boxed{3}$ $|x|\leqq2$ から　　$-2\leqq x\leqq2$　……①

$y\leqq\left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2$ から　　$y\leqq\dfrac{3}{4}|x^2-4|-2$　……②

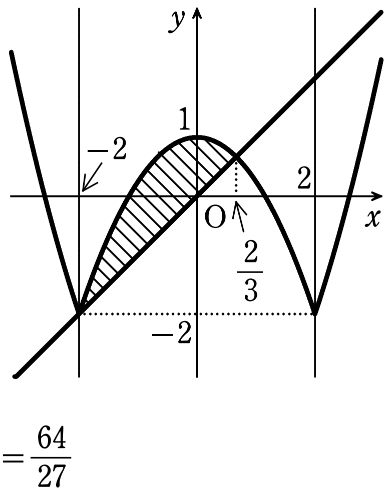
① のとき，② は　　$y\leqq-\dfrac{3}{4}(x^2-4)-2$

また，$x=-\dfrac{3}{4}(x^2-4)-2$ を解くと　　$3x^2+4x-4=0$

$(x+2)(3x-2)=0$

$x=-2,\ \dfrac{2}{3}$

したがって，連立不等式が表す領域は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



求める面積は

$$\int_{-2}^{\frac{2}{3}}\left\{-\frac{3}{4}(x^2-4)-2-x\right\}dx=\int_{-2}^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{3}{4}x^2-x+1\right)dx$$

$$=-\frac{3}{4}\int_{-2}^{\frac{2}{3}}(x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right)dx=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}\left\{\frac{2}{3}-(-2)\right\}^3=\frac{1}{8}\left(\frac{8}{3}\right)^3=\frac{64}{27}$$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int_{0}^{1}(x+t)^2f'(t)dt=\int_{0}^{1}(x^2+2xt+t^2)f'(t)dt$

$$=x^2\int_{0}^{1}f'(t)dt+2x\int_{0}^{1}tf'(t)dt+\int_{0}^{1}t^2f'(t)dt$$

$\displaystyle\int_{0}^{1}f'(t)dt=k$，$\displaystyle\int_{0}^{1}tf'(t)dt=l$，$\displaystyle\int_{0}^{1}t^2f'(t)dt=m$ とおくと，k，l，m は定数であり，

与えられた等式から　$\int_0^x f(t)\,dt+kx^2+2lx+m=x^2+C$　……①

① の両辺を x で微分すると　$f(x)+2kx+2l=2x$

すなわち　$f(x)=2(1-k)x-2l$　……②

よって　$f'(x)=2(1-k)$,

$$\int_0^1 f'(t)\,dt=\int_0^1 2(1-k)dt=\Big[2(1-k)t\Big]_0^1=2(1-k),$$

$$\int_0^1 tf'(t)\,dt=\int_0^1 2(1-k)tdt=\Big[(1-k)t^2\Big]_0^1=1-k,$$

$$\int_0^1 t^2f'(t)\,dt=\int_0^1 2(1-k)t^2dt=\left[\frac{2}{3}(1-k)t^3\right]_0^1=\frac{2}{3}(1-k)$$

ゆえに　$2(1-k)=k$，$1-k=l$，$\dfrac{2}{3}(1-k)=m$

これを解くと　$k=\dfrac{2}{3}$，$l=\dfrac{1}{3}$，$m=\dfrac{2}{9}$

したがって，② から　$f(x)=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}$

また，① に $x=0$ を代入すると　$m=C$　　$m=\dfrac{2}{9}$ であるから　$C=\dfrac{2}{9}$

$\boxed{5}$ (1)　$f'(x)=4x^3+6x^2-4x=2x(x+2)(2x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-2,\ 0,\ \dfrac{1}{2}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-8	↗	0	↘	$-\frac{3}{16}$	↗

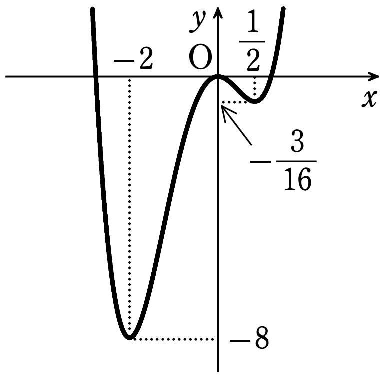
よって，$y=f(x)$ は

$x=-2$ のとき極小値 -8,

$x=0$　のとき極大値 0,

$x=\dfrac{1}{2}$　のとき極小値 $-\dfrac{3}{16}$

をとる。また，グラフは右の図のようになる。



(2)　$f(x)-g(x)=(x-x_1)^2(x-x_2)^2$ から

$x^4+2x^3-2x^2-ax-b$

$=x^4-2(x_1+x_2)x^3+(x_1{}^2+4x_1x_2+x_2{}^2)x^2-2x_1x_2(x_1+x_2)x+(x_1x_2)^2$

両辺の係数を比較して

$-2(x_1+x_2)=2$　……①,　$x_1{}^2+4x_1x_2+x_2{}^2=-2$　……②

$-2x_1x_2(x_1+x_2)=-a$　……③，　　$(x_1x_2)^2=-b$　……④

①から　　$x_1+x_2=-1$　……⑤

②から　　$(x_1+x_2)^2+2x_1x_2=-2$

⑤を代入して　　$(-1)^2+2x_1x_2=-2$　　よって　　$x_1x_2=-\dfrac{3}{2}$　……⑥

⑤，⑥を③，④に代入して　　$a=3$，$b=-\dfrac{9}{4}$

したがって，求める直線の方程式は　　$y=3x-\dfrac{9}{4}$

(3)　⑤，⑥から，x_1，x_2 は2次方程式 $t^2+t-\dfrac{3}{2}=0$ の解である。

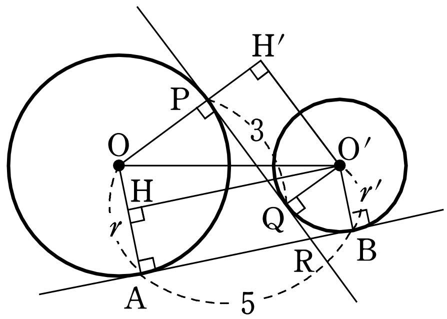
これを解くと　$t=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{2}$　　$x_1<x_2$ から　$x_1=\dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}$，$x_2=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$

区間 $x_1\leqq x\leqq x_2$ で $f(x)\geqq g(x)$ であるから

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{x_1}^{x_2}(x-x_1)^2(x-x_2)^2dx$$

$$=\frac{1}{30}(x_2-x_1)^5=\frac{1}{30}(\sqrt{7})^5=\frac{49\sqrt{7}}{30}$$

$\boxed{6}$ 右の図のように，点O′からOAに垂線O′Hを下ろす。



四角形ABO′Hは長方形であるから

$HO'=AB=5$

$HA=O'B=r'$

よって　　$OH=OA-HA=r-r'$

直角三角形OHO′において，三平方の定理により

$OH^2+HO'^2=OO'^2$

ゆえに　　$(r-r')^2+5^2=7^2$　　よって　　$(r-r')^2=24$

$r-r'>0$ であるから　　$r-r'=2\sqrt{6}$　……①

また，点O′からOPの延長に垂線O′H′を下ろす。

四角形PQO′H′は長方形であるから

$H'O'=PQ=3$，　$H'P=O'Q=r'$

よって　　$OH'=OP+H'P=r+r'$

直角三角形OO′H′において，三平方の定理により

$OH'^2+H'O'^2=OO'^2$

ゆえに　　$(r+r')^2+3^2=7^2$　　よって　　$(r+r')^2=40$

$r+r'>0$ であるから　　$r+r'=2\sqrt{10}$　……②

①，②を解くと　　$r=^{ア}\sqrt{10}+\sqrt{6}$，$r'=^{イ}\sqrt{10}-\sqrt{6}$

ここで，$AR=x$ とすると　　$PR=AR=x$

よって　　$RB=AB-AR=5-x$，　$RQ=PR-PQ=x-3$

$RB=RQ$ であるから　　$5-x=x-3$

したがって　　$x=4$　　　　よって　　$AR=^{ウ}4$

7 $\dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt[4]{k+1}+\sqrt[4]{k}}=\dfrac{(\sqrt[4]{k+1}+\sqrt[4]{k})(\sqrt[4]{k+1}-\sqrt[4]{k})}{\sqrt[4]{k+1}+\sqrt[4]{k}}=\sqrt[4]{k+1}-\sqrt[4]{k}$

よって　　(与式)$=(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{1})+(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})+\cdots\cdots+(\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n})=\sqrt[4]{n+1}-1$

8 (1)　a，b，c，d，e，f の決まり方は全部で $6!$ 通りあり，それぞれが起こることは同様に確からしい。

$a+b=c$ となるとき，c がとりうる値は 3，4，5，6 のいずれかである。

$c=3$ のとき　　$(a,\ b)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

$c=4$ のとき　　$(a,\ b)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$

$c=5$ のとき　　$(a,\ b)=(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$

$c=6$ のとき　　$(a,\ b)=(1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (5,\ 1)$

この 12 通りの a，b，c の組に対して d，e，f の決まり方がそれぞれ $3!$ 通りずつある。

よって，求める確率は　　$\dfrac{12\times3!}{6!}=\dfrac{12}{6\cdot5\cdot4}=\dfrac{1}{10}$

(2)　$a+b=c+d$ となるとき，$a+b\ (=c+d)$ がとりうる値は 5，6，7，8，9 のいずれかである。

[1]　$a+b=c+d=5$ のとき

和が 5 になる 2 数は　　1 と 4，　2 と 3

これらを $(a,\ b)$，$(c,\ d)$ に割り当てて，それぞれの数の並びを考えると

$${}_2P_2\times2\times2=8\ (\text{通り})$$

[2]　$a+b=c+d=6$ のとき

和が 6 になる 2 数は　　1 と 5，　2 と 4

同様に考えて　　${}_2P_2\times2\times2=8$ (通り)

[3]　$a+b=c+d=7$ のとき

和が 7 になる 2 数は　　1 と 6，　2 と 5，　3 と 4

同様に考えて　　${}_3P_2\times2\times2=24$ (通り)

[4]　$a+b=c+d=8$ のとき

和が 8 になる 2 数は　　2 と 6，　3 と 5

同様に考えて　　${}_2P_2\times2\times2=8$ (通り)

[5]　$a+b=c+d=9$ のとき

和が 9 になる 2 数は　　3 と 6，　4 と 5

同様に考えて　　${}_2P_2\times2\times2=8$ (通り)

[1]～[5] で考えた a，b，c，d の組に対して，e，f の決まり方がそれぞれ $2!$ 通りずつある。よって，求める確率は　　$\dfrac{(8+8+24+8+8)\times2!}{6!}=\dfrac{7}{45}$