数学 II の微分

極限計算
　↓
微分計算（定義による微分）
　↓
微分計算（公式による微分）

応用
- 接線（法線）　→　共通接線（３種），接線本数
- グラフ　→　最大最小問題，方程式・不等式，図形問題などへ

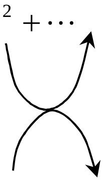
※グラフさえかければ，さまざまな問題が解ける。
- 関数の最大最小＝グラフの高さ比べ
- 方程式＝解を共有点に対応させる　（できれば文字定数分離）
- 不等式＝グラフの上下関係

《グラフの概形》

2 次関数 $y = ax^2 + \cdots$

$a > 0$ のとき，

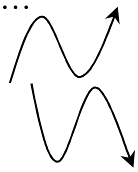
$a < 0$ のとき，



3 次関数 $y = ax^3 + \cdots$

$a > 0$ のとき，

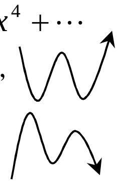
$a < 0$ のとき，



4 次関数 $y = ax^4 + \cdots$

$a > 0$ のとき，

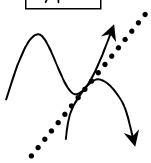
$a < 0$ のとき，



※　ただし，$f'(x) = 0$ が重解，虚数解をもつときは，グラフがつぶれる。

○共通接線（３種）

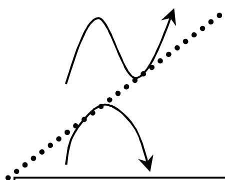
TypeI



1 接点文字設定

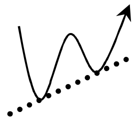
$$\begin{cases} f(t) = g(t) \\ f'(t) = g'(t) \end{cases}$$

TypeII



2 接点文字設定
⇒接線公式＆係数比較
ただし，2 次なら判別式

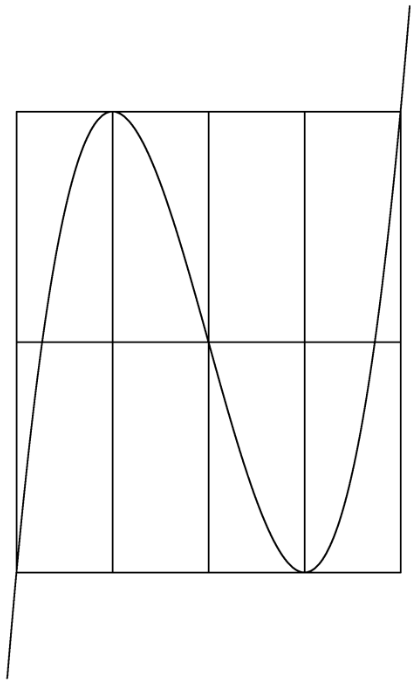
TypeIII



TypeII と同じ
ただし 4 次なら
2 接点と接線文字設定
⇒係数比較

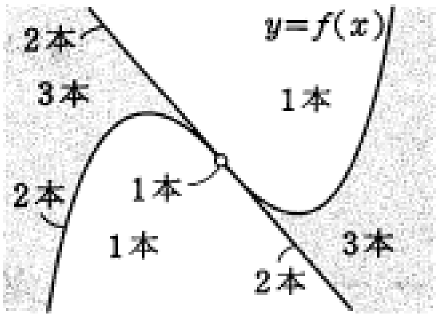
数学Ⅱの微分・チェックリスト

○３次関数のグラフの等分性



変曲点に関して点対称
図のような等分性をもつ

○接線本数 MAP



数学 II の積分

不定積分計算　：　微分の逆演算として
↓
定積分計算
↓
定積分で面積が求まる。
Point　：　被積分関数は上下関係に着目
積分区間は左端から右端まで

軸上＝そのまま
軸下＝マイナス
２曲線なら　（上）－（下）

※さまざまな積分計算の工夫
1）　パックづめ積分
2）　区間対称の定積分
3）　被積分関数の（上）－（下）は，連立計算（上）＝（下）と同等
4）　交点＝解　$x=\alpha$　⇒　因数$(x-\alpha)$をもつ
　　接点＝重解$x=\alpha$　⇒　２乗因数$(x-\alpha)^2$をもつ

5）　積分公式　$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$
6）　面積公式４種
7）　同一関数の積分の繰り返し⇒不定積分を文字でおく
8）　面積等しき時は，一気に積分してゼロ
9）　絶対値積分
　　$\int_a^b |f(x)|\,dx$　は，$y=f(x)$とx軸の間の面積（$a \leqq x \leqq b$の部分）
　　$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$は，$y=f(x)$と$y=g(x)$の間の面積（$a \leqq x \leqq b$の部分）

10）　一次関数は積分計算せず，三角形・台形の面積を利用

積分方程式Ⅰ

区間が定数のみのとき

$\int_a^b f(t)dt = A$（定数）とおく。

積分方程式Ⅱ

区間の上端が変数のとき

$\int_a^x f(t)dt$ において，

（ⅰ）x で微分して，$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

（ⅱ）$x = a$ を代入して，$\int_a^a f(t)dt = 0$

関数方程式

（１）整式 TYPE　⇒　まず次数決定，次に係数比較

（２）$f(a+b)$ 型　⇒　①数値代入　②微分の定義に持ち込む

【例題 01】

すべての実数で定義された関数 $f(x)$ は次の２条件(A)，(B)を満たすものとする．

（A）　すべての実数 x，y に対して $f(x+y)=f(x)+f(y)+8xy$

（B）　$f'(0)=3$

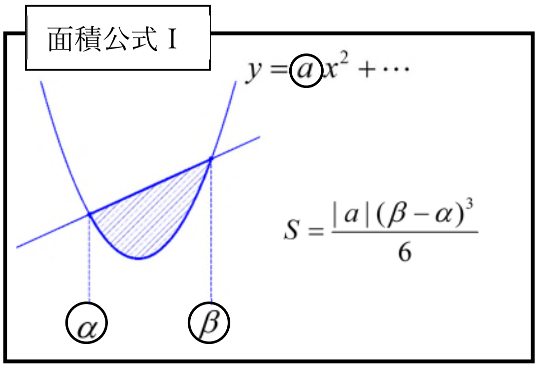
（１）　$f(0)$ の値を求めよ．

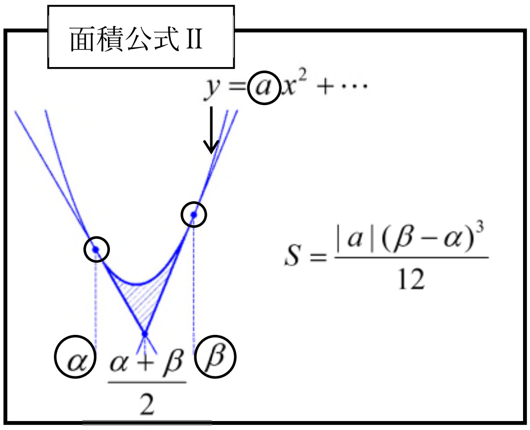
（２）　$f(x)$ はすべての実数 x で微分可能であることを示し，$f'(x)$ を求めよ．

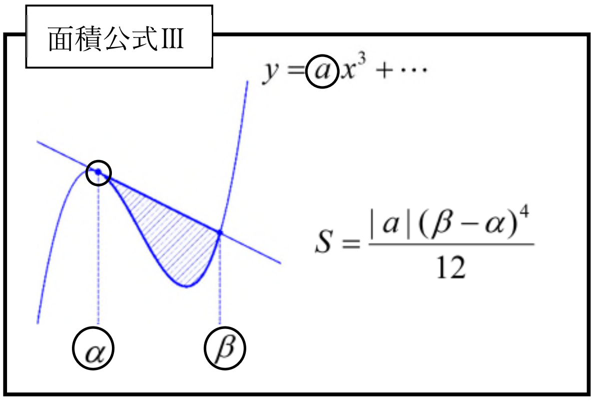
（３）　$f(x)$ を求めよ．

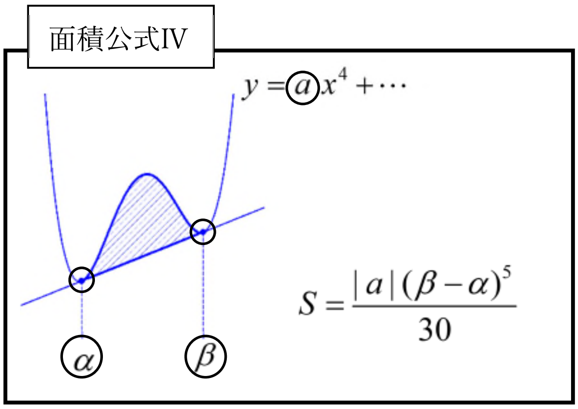
答　$f(x)=4x^2+3x$

面積公式









【例題 02】

2 つの曲線 $y=2x^2-2$ と $y=2x^2-4x+2$ が共通の接線 l をもつとき，

(1)　共通接線 l の方程式を求めよ。

(2)　2 つの曲線と接線とで囲まれた部分の面積を求めよ。

久留米 2013

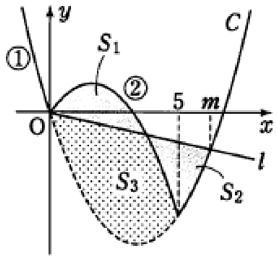
【例題 03】

$y=x^4+2x^3-3x^2-2x+1$ のグラフと 2 点で接する直線の方程式と，接点の座標を求めよ。

久留米 2012

数学 II の積分・チェックリスト

○面積公式の組み合わせの例



○面積で重要なのは差の関数

○交点を文字設定（便宜上）して面積公式などに持ち込む

○はみだしけずり論法

【例題 04】 $\displaystyle\int_0^1 \left|x^2 - a\right| dx$ は，$a=$ $\boxed{}$ のとき最小。

○積分がらみの恒等式では関数代入の手順に注意。

【例題 05】

定数 $a>1$ に対し，$f(x)=(x^2-1)(x^2-a^2)$ とおく。曲線 $y=f(x)$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を S_1，曲線 $y=f(x)$ $(1 \leqq x \leqq a)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を S_2 とする。

(1) $f(x)$ の極値を a を用いて表せ。

(2) S_1 と S_2 を a を用いて表せ。

(3) $11S_2=19S_1$ を満たす a の値がただ 1 つであることを示し，かつ a の値を求めよ。

談話室マロニエ　数学QUIZ　数学Ⅱの微分

A 問題

x を変数，a を定数とする。関数 $f(x)$ に対して，

$f'(x)$ を $\boxed{\text{ア}}$ といい，$f'(a)$ を $x=a$ における $\boxed{\text{イ}}$ という。

極限で表すと，$f'(a)=\boxed{\text{ウ}}=\boxed{\text{エ}}$

よって，$f'(x)=\boxed{\text{オ}}$。

これを用いると次の公式が得られる。（証明では二項定理などで展開する必要がある。）

$f(x)=x^n$ のとき，$f'(x)=\boxed{\text{カ}}$

曲線 $y=f(x)$ の $x=a$ に対応する点 $\big(a, f(a)\big)$ における接線の方程式は，$\boxed{\text{キ}}$

関数 $f(x)$ は $f'(x)>0$ のとき $\boxed{\text{ク}}$ し，$f'(x)<0$ のとき $\boxed{\text{ケ}}$ する。

B 問題

lim の問題では，$\dfrac{0}{0}$（不定形）$\Rightarrow\boxed{\text{ケ}}$，

3 次関数 $f(x)$ に対して，2 次方程式 $f'(x)=0$ の判別式 D を用いると，

単調$\Leftrightarrow\boxed{\text{コ}}$　，極値を持つ$\Leftrightarrow\boxed{\text{サ}}$，

ただし，「単調」とは「単調増加または単調減少」のことを表す。

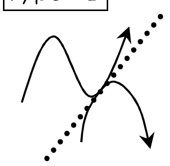
3 次関数のグラフは，$\boxed{\text{シ}}$ という性質をもつ。

極値をもつ 3 次関数のグラフは，$\boxed{\text{ス}}$ という性質をもつ

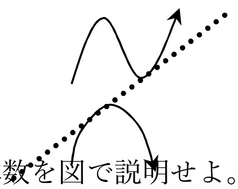
C 問題

共通接線　以下の 3 タイプの解法のポイントは $\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タ}}$，$\boxed{\text{チ}}$ である。

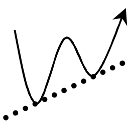
Type Ⅰ



Type Ⅱ



Type Ⅲ



3 次関数のグラフに引ける接線本数を図で説明せよ。$\boxed{\text{ツ}}$

談話室マロニエ　数学QUIZ　数学Ⅱの積分

A 問題（n は非負整数とする）

関数 $f(x)$ に対して，その導関数が $f(x)$ に等しい関数を $f(x)$ の $\boxed{\text{ア}}$ という。

これを，記号 $\boxed{\text{イ}}$ で表す。

不定積分の公式　$\displaystyle\int x^n dx = \boxed{\text{ウ}}$

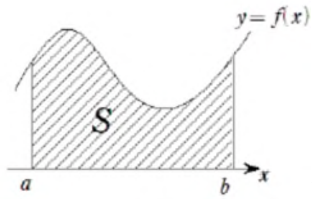
定積分の公式　$\displaystyle\int_a^b x^n dx = \boxed{\text{エ}}$

$\displaystyle\int (x-\alpha)^n\, dx = \boxed{\text{オ}}$ ←$\boxed{\text{パックづめ積分}}$と呼んでます。

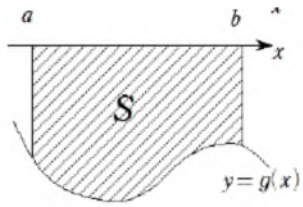
$\displaystyle\int_{-a}^{a} x^{2n+1} dx = \boxed{\text{カ}}$,　$\displaystyle\int_{-a}^{a} x^{2n} dx = \boxed{\text{キ}}$,

1/6 公式　$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\, dx = \boxed{\text{ク}}$,

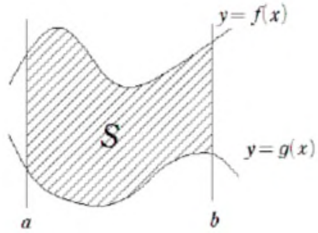
$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = \boxed{\text{ケ}}$,　これを$\boxed{\text{微分積分学の基本定理}}$という



左図で面積 $S = \boxed{\text{コ}}$,



左図で面積 $S = \boxed{\text{サ}}$,



左図の面積 $S = \boxed{\text{シ}}$,

B 問題

積分方程式Ⅰ　区間がともに定数のときの解法のポイントは，$\boxed{\text{ス}}$ である。

積分方程式Ⅱ　区間の上端が変数のときの解法のポイントは，$\boxed{\text{セ}}$ である。

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより
数学Ⅱの微分篇

標準問題

⑫6-標-1

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1,\ \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=2,\ \lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=3$ となるような多項式のうち，次数の最も低いものを求めよ。

⑫6-標-2

k を定数とするとき，x の方程式 $x^4-6x^2-8x+13-k=0$ が実数解を持つ条件を求めよ。

⑫6-標-3

3 次関数 $f(x)=3x^3+ax^2+bx+c$ が次の条件（ⅰ），（ⅱ）を満たすとき，定数 a, b, c の値を求めよ。

（ⅰ）$f(x)$ は $x=\alpha$ および $x=\beta$ $(\alpha\neq\beta)$ で極値をとり，2 点 $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta))$ は点 $(0, 1)$ に関して対称。

（ⅱ）$\left|f(\alpha)-f(\beta)\right|=\dfrac{4}{9}$

⑫6-標-4

3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が $x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとり，$f(\gamma)=f(\alpha),\ \gamma\neq\alpha$ とする。

(1) a, b を α, β で表せ

(2) $(\gamma-\beta):(\beta-\alpha)$ を求めよ。

⑫**6-標-5**

放物線$y=\dfrac{1}{8}x^2$の接線であり同時に放物線$y=-x^2$の法線であるような直線の方程式を求めよ。

⑫**6-標-6**

xy平面上の放物線$y=x^2$をCで表す。

平面上の$(a, 5)$を通るCの法線が3本存在するとき，aの値の範囲を求めよ。

発展問題

⑫**6-発-1**

$f(x)=x^3-x$が区間$t-1\leqq x\leqq t$でとる値の最大値を$g(t)$とする。$y=g(t)$のグラフをかけ。

⑫**6-発-2**

aを$a\geqq 0$の定数とする。関数$f(x)=\left|x^3-3a^2x\right|$の$0\leqq x\leqq 1$における最大値$M(a)$を求めよ。さらに，$M(a)$を最小にする$a$の値を求めよ。

⑫**6-発-3**

実数aに対して，$f(x)=x^3-3ax$，$g(x)=f\big(f(x)\big)$とおく。方程式$g(x)=0$が相異なる９個の実数解をもつようなaの範囲を求めよ。

⑫**6-発-4**

３次関数$h(x)=px^3+qx^2+rx+s$は次の条件(ｉ)，(ⅱ)を満たすものとする。

(ｉ)　$h(1)=1, h(-1)=-1$

(ⅱ)　区間$-1<x<1$で極大値１，極小値-1をとる。

このとき，$h(x)$を求めよ。

⑫**6-発-5**

cを正の実数とし，$f(x)=x^3+3x^2, g(x)=x^3+3x^2+c$とする。直線$l$は点$\mathrm{P}\big(p, f(p)\big)$で曲線$y=f(x)$と接し，$\mathrm{Q}\big(q, g(q)\big)$で曲線$y=g(x)$と接する。

(1)　cをpで表せ。

(2)　直線lと曲線$y=f(x)$のＰ以外の交点をＲとする。２つの線分の長さの比PQ：QRを求めよ。

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより 数学Ⅱの積分篇

標準問題

⑫6-標-7

4 次関数 $f(x)=ax^4+bx^2+c$ が $\int_0^1 xf(x)dx=\dfrac{1}{6}$ をみたし，さらに任意の 2 次関数 $g(x)$ に対してつねに $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx=0$ であるとき，a, b, c の値を求めよ。

⑫6-標-8

(1)　$y=12x^3-12(2+k)x^2+24kx$　$(k>0)$ と，x 軸とで囲まれた部分の面積の総和 S を求めよ。

(2)　(1)で求めた S の最小値を求めよ。

⑫6-標-9

2 曲線 $y=\dfrac{1}{2}x^2+3x$，$y=\dfrac{1}{2}x^2-3x+6$ がある。

(1)　この 2 曲線の共通接線を求めよ。

(2)　この 2 曲線およびその共通接線とで囲まれる部分の面積を求めよ。

⑫6-標-10

曲線 $C: y=x^3-x$ および，放物線 $y=x^2+k$ $(k>0)$ がある。

(1)　この放物線と曲線 C が接するとき，k の値を求めよ。

(2)　(1)で定まる放物線と曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ。

⑫**6-標-11**

(1)　$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2\,dx=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$ を証明せよ。

(2)　曲線 $y=x^4-2x^3-3x^2$ を C とする。C と異なる 2 点で接する直線 L の方程式を求めよ。また，このとき C と L とで囲まれる部分の面積を求めよ。

⑫**6-標-12**

$x\leqq 0$ において定義された関数 $f(x)=\displaystyle\int_{x}^{x+1}|t^2-2t|\,dt$ がある。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　$f(x)$ を最小にする x の値を求めよ。

⑫**6-標-13**

曲線 $C:y=x(x-1)^2$ と直線 $l:y=ax$ とがある。

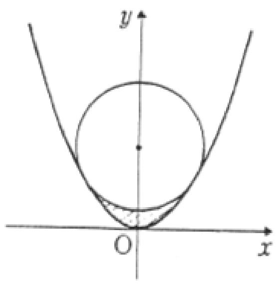
(1)　曲線 C と直線 l が異なる 3 点で交わるときの a のとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　$a<1$ のとき，曲線 C と直線 l とで囲まれた 2 つの図形の面積が等しくなるように a の値を求めよ。

⑫**6-標-14**

(1)　$a>1$ のとき，円 $x^2+(y-a)^2=1$ が放物線 $y=x^2$ と接するような a の値を求めよ。

(2)　(1)のとき，右の図の斜線をつけた部分の面積を求めよ



発展問題

⑫**6-発-6**

放物線$y=-(x-p)^2+q$の頂点が曲線$y=x(x^2-3)$上にあり，これらの２曲線の互いに相異なる共有点の個数が２であるとする。このとき，これらの２曲線で囲まれる部分の面積を求めよ。ただし，$0<p<2$とする。

⑫**6-発-7**

曲線$C:y=x(x^2-1)$とCをx軸の正の向きにa $(a>0)$だけ平行移動した曲線C_aがある。

(1)　CとC_aとが異なる２点で交わるようなaの範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた範囲のaに対して，CとC_aとで囲まれた部分の面積Sをaで表せ。

(3)　(2)で求めたSを最大にするaの値を求めよ。

⑫**6-発-8**

曲線$C:y=x(x-1)(x-3)$と直線$l:y=ax$とがある。

(1)　曲線Cと直線lとが異なる３点で交わるとき，aのとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$a<3$のとき，曲線Cと直線lとで囲まれた２つの図形の面積が等しくなるようにaの値を定めよ。

⑫**6-発-9**

放物線$y=\frac{5}{8}x^2$と点 A$(0,2)$を中心とする円が異なる２点で接するとき，この円と放物線で囲まれる部分の面積を求めよ。