

YAWARAKA 先生のテキスト 解答 ③ 3 極限

標準問題

【1】 $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 2, \frac{1}{e}, -1, \frac{1}{8}$

【2】 $a=1, b=\frac{3}{2}, c=-\frac{5}{8}$

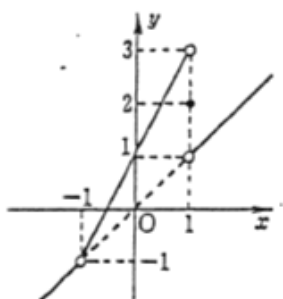
【3】 1

【4】 存在しない

【5】 $\frac{21}{8}$

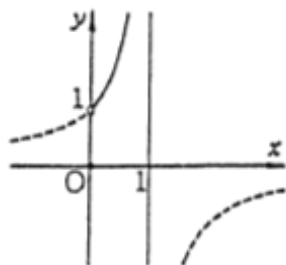
【6】 $L(n)=2\sqrt{n \tan \frac{\pi}{n}}$ より, $2\sqrt{\pi}$

【7】



【8】 $a=0, b=1$

【9】 $f(x)=0, f(x)>1$



【10】 $\pi \tan^2 \theta \cdot \frac{(1+\sin \theta)^2}{4 \sin \theta}$

【11】 $f'(x)=\frac{1}{x}$

【12】 7

【13】 $f(a)+\frac{a}{n}f'(a)$

【14】 (1) $x \neq 0$ のとき, $f'(x)=\frac{1}{2}-x \sin \frac{1}{x}+\cos \frac{1}{x}$, $x=0$ のとき, $f'(0)=\frac{1}{2}$

(2) $x=0$ で不連続

発展問題

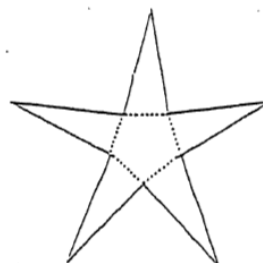
③発-1-1

$n \geq 3$ とし、正 n 角すいの表面を、底面に含まれない n 個の辺で切り開いて得られる展開図を考える。正 n 角すいの頂点は、展開図においては、異なる n 個の点になっている。ここでは、これらの n 個の点を通る円の半径が 1 であるような、正 n 角すいのみを考えることにする。

(1) 各 n に対して、このような正 n 角すいの体積の最大値 v_n を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ を求めよ。

(注) 図は、 $n = 5$ の場合の正 n 角すいとその展開図の例である。



何を要致にとるのがよいかを考えよ

す。

【解】 (i) 底面の中心と辺の距離を x とおくと、立体の高さは

$$\sqrt{(1-x)^2 - x^2} = \sqrt{1-2x} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{底面積は } \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \tan \frac{\pi}{n} \cdot 2n = nx^2 \tan \frac{\pi}{n}$$

$$\therefore V = \frac{1}{3} \cdot nx^2 \tan \frac{\pi}{n} \sqrt{1-2x} = \frac{n}{3} \tan \frac{\pi}{n} \sqrt{x^2(1-2x)}$$

ただし、立体ができるのは①が存在するときで、 $0 < x < \frac{1}{2}$

$y = x^2(1-2x)$ とおくと

$$y' = 4x^2 - 10x^2$$

$$= 2x^2(2-5x)$$

よって y は $x = \frac{2}{5}$ で最大と



x	0	...	$\frac{2}{5}$	...	$\frac{1}{2}$
y'		+	0	-	
y		/		\	

$$\text{なるから、} v_n = \frac{n}{3} \tan \frac{\pi}{n} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \sqrt{1-2 \cdot \frac{2}{5}} = \frac{4n}{15\sqrt{5}} \tan \frac{\pi}{n} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

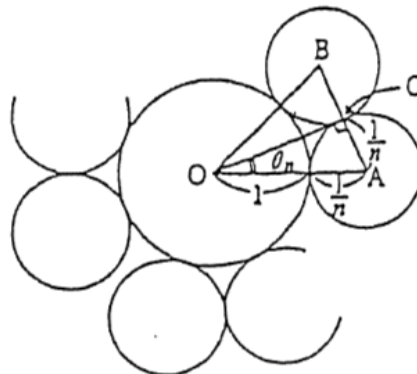
$$(ii) \quad v_n = \frac{4n}{15\sqrt{5}} \cdot \frac{\tan \theta}{\theta} \left(\theta = \frac{\pi}{n}\right) \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{4\pi}{15\sqrt{5}} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

③ 発-1-2 LTC

n を自然数とする。半径 $\frac{1}{n}$ の円を互いに重なり合わないよう半径 1 の円に外接させる。このとき、
 外接する円の最大個数を a_n とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ を求めよ。

図のように、半径 1 の円 O に外接し、互に
 外接している 2 円 A, B を考え、
 $\angle AOB = 2\theta_n$ とすれば

$$\begin{aligned} \sin \theta_n &= \frac{AC}{OA} \quad (C \text{ は 2 円 } A, B \text{ の接点}) \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$



外接する小円の最大個数は、1 つ 1 つが外
 接し、1 か所だけスキ間があるか、ちょうど接
 するかであることを考え $\frac{\pi}{\theta_n} - 1 < a_n \leq \frac{\pi}{\theta_n} \quad \dots\dots ②$ をみたとす。

$$\therefore \frac{\pi}{n\theta_n} - \frac{1}{n} < \frac{a_n}{n} \leq \frac{\pi}{n\theta_n} \quad \dots\dots ③$$

①より $\frac{1}{n} = \frac{\sin \theta_n}{1 + \sin \theta_n}$ であり、 $n \rightarrow \infty$ のとき $\theta_n \rightarrow 0$ となるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n\theta_n} &= \lim_{\theta_n \rightarrow 0} \frac{\pi}{\theta_n} \cdot \frac{\sin \theta_n}{1 + \sin \theta_n} \\ &= \lim_{\theta_n \rightarrow 0} \frac{\sin \theta_n}{\theta_n} \cdot \frac{\pi}{1 + \sin \theta_n} = \pi \quad \dots\dots ④ \end{aligned}$$

よって③より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{n\theta_n} - \frac{1}{n} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n\theta_n}$$

④を考慮して $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \pi \quad \dots\dots (\text{答})$

③ 発-1-3 LTC

$OA_1 = OB = 1$, $\angle B_1OA_1 = \theta$ ($0 < \theta < \pi$) であるような二等辺三角形 $O_1A_1B_1$ がある。

辺 A_1B_1 の中点を B_2 とし、辺 OA_1 上に $OA_2 = OB_2$ となる点 A_2 をとり、二等辺三角形 OA_2B_2 をつくる。以下同様に、 $n > 2$ についても二等辺三角形 OA_nB_n を作っていく。

辺 OA_n の長さを a_n とおく。

(1) $a_3 \cdot \sin \frac{\theta}{4}$ を計算せよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を計算せよ。

$$= \cos \frac{\theta}{2}$$

$$a_2 = OA_2 = OB_2 = OA_1 \cos \theta_1 = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore a_2 \sin \frac{\theta}{4} = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{4} = \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cdot 2 \cos \frac{\theta}{4} \sin \frac{\theta}{4} = \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \\ = \frac{1}{4} \sin \theta \quad \dots\dots\dots(\text{答})$$

(2) $a_4 = OA_4 = OB_4 = a_3 \cos \theta_1 = a_3 \cos \frac{\theta}{2}$

$$\therefore a_4 \sin \frac{\theta}{2^3} = a_3 \cos \frac{\theta}{2^2} \sin \frac{\theta}{2^3} = a_3 \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \sin \theta$$

すなわち $a_4 \sin \frac{\theta}{2^3} = \frac{1}{2^3} \sin \theta$

よって、一般に $a_n \sin \frac{\theta}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \sin \theta \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$ が成り立つと推定できる。

実際、ある自然数 n に対して、 $\textcircled{1}$ が正しいと仮定すると、 $n+1$ のときは

$$a_{n+1} = OA_{n+1} = OB_{n+1} = a_n \cos \theta_{n+1} = a_n \cos \frac{\theta}{2^n}$$

$$\therefore a_{n+1} \sin \frac{\theta}{2^n} = a_n \cos \frac{\theta}{2^n} \sin \frac{\theta}{2^n} = \frac{1}{2} a_n \sin \frac{\theta}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n} \sin \theta$$

が成り立つので、数学的帰納法により、 $\textcircled{1}$ は正しい。

よって、 $a_n = \frac{\frac{\theta}{2^{n-1}}}{\sin \frac{\theta}{2^{n-1}}} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta}$ だから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\sin \theta}{\theta} \quad \dots(\text{答})$

$$\Leftarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

【別解】 $\angle B_nOA_n = \frac{\theta}{2^{n-1}}$ だから、 $a_{n+1} = OB_{n+1} = OA_n \cos \angle A_nOB_{n+1} = a_n \cos \frac{\theta}{2^n}$

よって $a_{n+1} \sin \frac{\theta}{2^n} = a_n \cos \frac{\theta}{2^n} \sin \frac{\theta}{2^n} = \frac{1}{2} a_n \sin \frac{\theta}{2^{n-1}}$ となるから、これより数列 $\left\{ a_n \sin \frac{\theta}{2^{n-1}} \right\}$

は、初項 $a_1 \sin \theta = \sin \theta$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

よって、 $a_n \sin \frac{\theta}{2^{n-1}} = \sin \theta \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \sin \theta \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$ が成り立つ。

(1) $\textcircled{1}$ で、 $n=3$ とおいて、 $a_3 \sin \frac{\theta}{4} = \frac{1}{4} \sin \theta$ が成り立つ。(2)は同じ。

③ 発-1-4

半径1の円に内接する $3n$ 個の半径の等しい円を1のように描く。さらに図2のように $3n$ 個の小さな半径の等しい円を描く。この操作を無限に繰り返したとき、 $3n$ 個ずつ次々に描かれる円の面積の総和 S_n と、これらの円の円周の長さを総和 C_n を求めよ。ただし、 $n \geq 2$ とする。

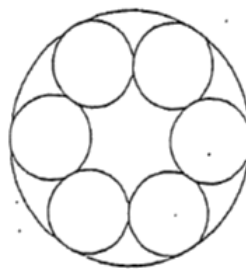


図1

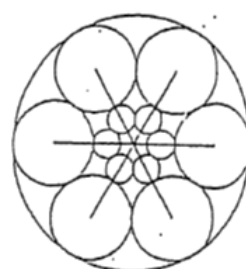


図2

図
半
と
そ

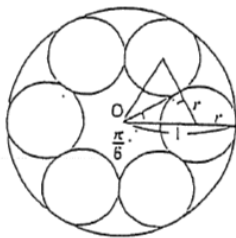
② 類題の多いタイプの無限級数の問題です。(2)は(1)とほとんど同じ議論をする

ので、無駄なくやりましょう。

④ 半径1の円の中心をO、 k 回目に描かれる円を P_k 、 P_k の半径を r とする。

(1) 右図より、

$$(1-r)\sin\frac{\pi}{6}=r$$



$$\therefore r=\frac{1}{3}$$

このとき P_2 はOを中心とする半径 $1-2r$ の円に内接するから、Oを中心として P_1 を $1-2r$ 倍に相似拡大したものとなり、以下同様に、 P_{k+1} はOを中心として P_k を $1-2r$ 倍に相似拡大したものとなる。

よって、 P_k の半径は $r(1-2r)^{k-1}$ であるから、

$$S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} 6 \cdot \pi \{r(1-2r)^{k-1}\}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} 6\pi r^2 (1-2r)^{2k-2}$$

$$C_2 = \sum_{k=1}^{\infty} 6 \cdot 2\pi r (1-2r)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} 12\pi r (1-2r)^{k-1}$$

したがって、 S_2 は公比 $(1-2r)^2 = \frac{1}{9}$ の無限等比級数、

C_2 は $1-2r = \frac{1}{3}$ の無限等比級数であるから、ともに収束して、

$$S_2 = \frac{6\pi r^2}{1-(1-2r)^2} = \frac{3\pi r}{2(1-r)} = \frac{3}{4}\pi$$

$$C_2 = \frac{12\pi r}{1-(1-2r)} = 6\pi$$

(2) $\theta = \frac{2\pi}{3n} + 2 = \frac{\pi}{3n} \dots\dots\dots ①$ とおくと、(1)と同様に、

$$(1-r)\sin\theta = r \dots\dots\dots ② \quad \therefore r = \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} 3n \cdot \pi \{r(1-2r)^{k-1}\}^2$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 3n\pi r^2 (1-2r)^{2k-2}$$

$$C_n = \sum_{k=1}^{\infty} 3n \cdot 2\pi r (1-2r)^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 6n\pi r (1-2r)^{k-1}$$

したがって、 S_n は公比 $(1-2r)^2$ の無限等比級数、 C_n は $1-2r$ の無限等比級数であり、 $0 < 1-2r < 1$ であるから、ともに収束して、

$$S_n = \frac{3n\pi r^2}{1-(1-2r)^2} = \frac{3n\pi r}{4(1-r)}$$

$$= \frac{3n\pi}{4} \sin\theta = \frac{3n\pi}{4} \sin\frac{\pi}{3n} \quad (\because ②, ①)$$

$$C_n = \frac{6n\pi r}{1-(1-2r)} = 3n\pi$$

③ 発-1-5

$-\pi \leq x \leq \pi$ のとき, 無限級数

$$\sin^2 x + \sin^2 x \cos^3 x + \sin^2 x \cos^6 x + \dots + \sin^2 x \cos^{3(n-1)} x + \dots$$

の和を $f(x)$ とする。

$f(x)$ の増減を調べ, $y = f(x)$ のグラフを描け。

解答 (1) $|\cos^3 x| = 1$ となるのは $x = 0, \pi, -\pi$ のときであるから $x \neq 0, \pm\pi$ のとき $|\cos^3 x| < 1$

$$\therefore f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos^3 x} = \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x + \cos^2 x} \dots\dots\dots (1)$$

$x = 0, \pm\pi$ のとき $\sin^2 x = 0$ だから

$$f(x) = 0 \dots\dots\dots (2)$$

ところで $x = \pm\pi$ のとき ①は 0 になるから ①と②は一致する。よって次の答を得る。

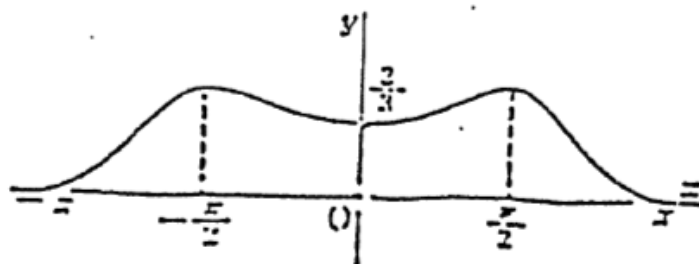
$$\text{答} f(x) = \begin{cases} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x + \cos^2 x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x + \cos^2 x} = \frac{2}{3} \dots\dots\dots \text{答}$$

(3) $x \neq 0$ のとき

$$f'(x) = \frac{(\cos x + 2) \sin 2x}{2(1 + \cos x + \cos^2 x)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$$

x	$-\pi$	$\dots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\dots$	0	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$	$\dots$	π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



③ 発-1-6 LTC

関数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1}a + bx - cx^n}{1 + 3^{n-1} + x^{n-1}}$ は実数全体で定義され、かつ $f(-3) = 3$ である。ただし、 n は自然数とする。

- (1) a, b, c の値を求めよ。
 (2) 関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ。

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1}a + bx - cx^n}{1 + 3^{n-1} + x^{n-1}} \quad \dots\dots ①$$

$$(1) \quad f(-3) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1}a - 3b - c(-3)^n}{1 + 3^{n-1} + (-3)^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - \frac{3b}{3^{n-1}} + (-1)^{n-1} \cdot 3c}{\frac{1}{3^{n-1}} + 1 + (-1)^{n-1}} \quad \dots\dots ②$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1}$ は発散する (存在しない) から、 $f(-3) = 3$ と定まるためには分母で分子が約せるべきで、分母をみくらべて $a = -3b = 3c$ ③
 が必要。このとき

$$f(-3) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \left\{ \frac{1}{3^{n-1}} + 1 + (-1)^{n-1} \right\}}{\frac{1}{3^{n-1}} + 1 + (-1)^{n-1}} = a$$

$$f(-3) = 3 \text{ より } a = 3 \quad \text{よって ③より } b = -1, c = 1 \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) (1) により ①は $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - x - x^n}{1 + 3^{n-1} + x^{n-1}}$ ①' となる。

$$|x| > 3 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x} \right)^{n-1} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{n-1} = 0$$

$$\text{より } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \left(\frac{3}{x} \right)^{n-1} - x \left(\frac{1}{x} \right)^{n-1} - x}{\left(\frac{1}{x} \right)^{n-1} + \left(\frac{3}{x} \right)^{n-1} + 1} = -x$$

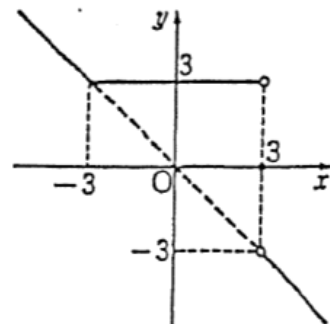
$$x = -3 \text{ のとき } f(-3) = 3$$

$$x = 3 \text{ のとき } f(3) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{1 + 2 \cdot 3^{n-1}} = 0$$

$$|x| < 3 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{3} \right)^{n-1} = 0 \text{ より}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - x \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} - \left(\frac{x}{3} \right)^{n-1} x}{\left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} + 1 + \left(\frac{x}{3} \right)^{n-1}} = 3$$

以上より、グラフは右図の太線のようになる。



③発-1-7 演習添削

2つの級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ がそれぞれ和 A, B を持つとき, 次の問いに答えよ。ただし, $a_1 = 1$ とする。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n + a_{n+1})$ を A, B で表せ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$ のとき, $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 (a_n - a_{n+1})$ を A, B で表せ。

解答 (1) $\sum_{n=1}^N n(a_n + a_{n+1}) = \sum_{n=1}^N na_n + \sum_{n=1}^N na_{n+1}$

$$= \sum_{n=1}^N na_n + \sum_{n=2}^{N+1} (n-1)a_n$$

$$= \sum_{n=1}^N na_n + \sum_{n=1}^{N+1} (n-1)a_n$$

$$= \sum_{n=1}^N na_n + \sum_{n=1}^{N+1} na_n - \sum_{n=1}^{N+1} a_n$$

★ 添え下をつけ変えた

★ $b_1 = 0$ なら

$$\sum_{n=2}^N b_n = \sum_{n=1}^N b_n$$

ここで $N \rightarrow \infty$ とすれば, 第1項および第2項は B に, 第3項は $-A$ に収束する。したがって,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n + a_{n+1}) = 2B - A \quad \dots\dots\dots(\text{答})$$

(2) $\sum_{n=1}^N (n+1)^2 (a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^N (n+1)^2 a_n - \sum_{n=1}^N (n+1)^2 a_{n+1}$

$$= \sum_{n=1}^N (n+1)^2 a_n - \sum_{n=2}^{N+1} n^2 a_n$$

★ 添え字をつけ加えた

$$= (1+1)^2 \cdot a_1 + \sum_{n=2}^N ((n+1)^2 a_n - n^2 a_n)$$

$$\star \sum_{n=1}^N \alpha_n = \alpha_1 + \sum_{n=2}^N \alpha_n$$

$$- (N+1)^2 a_{N+1}$$

$$\sum_{n=2}^{N+1} \alpha_n = \sum_{n=2}^N \alpha_n + \alpha_{N+1}$$

$$= 4a_1 + \sum_{n=2}^N (2na_n + a_n) - (N+1)^2 a_{N+1}$$

$$= 2 \sum_{n=1}^N na_n + \sum_{n=1}^N a_n + a_1 - (N+1)^2 a_{N+1}$$

$N \rightarrow \infty$ とすると, 項 $(N+1)^2 a_{N+1}$ は0に収束することに注意して

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 (a_n - a_{n+1}) = 2B + A + 1 \quad \dots\dots\dots(\text{答})$$

③ 発-1-8

$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi \cos x$ について次の問いに答えよ.

- (1) $x = f(x)$ はただ 1 つの解を持つことを示せ.
- (2) 数列 $\{x_n\}$ を $x_1 = 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n \geq 1$) で定めるとき, $\{x_n\}$ が収束することを示し $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ

③ 発-1-9

すべての実数 x に対して定義された関数 $f(x)$ は第 2 次導関数を持ち、つねに $f'(x) \neq 0$ を満たすとする。また、方程式 $f(x) = 0$ はただ 1 つの実数解 α をもつとする。

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ とおく.}$$

- (1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(x_n, f(x_n))$ における接線と x 軸との交点を $(x_{n+1}, 0)$ とする。このとき、 $x_{n+1} = F(x_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$ が成り立つことを示せ.)
- (2) すべての実数 x に対して $|f(x)f''(x)| \leq M\{f'(x)\}^2$ を満たす定数 M ($M \geq 0$) が存在するとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq M|x - \alpha| \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (3) 定数 M が 1 より小さいとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ となることを示せ。