

試験時間50分（短）

1 不等式 $\frac{3}{1+\frac{2}{x}} \geq x^2$ を解け.

2 $\sqrt{2-x^2} > 2x-1$ を解け.

3 $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ のとき, $f(f(f(x)))$ を求めよ.

4 次の空欄に当てはまる数式を入れよ。（一桁の整数とは限らない）

関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0, x > -\frac{b}{2a}$) の逆関数を $f^{-1}(x)$ で表す.

(1) $f^{-1}(0) = \frac{4}{3}, f^{-1}(2) = 2, f^{-1}(10) = 3$ のとき, 係数は $a = \overset{ア}{\square}, b = -\overset{イ}{\square},$

$c = \overset{ウ}{\square}$ である.

(2) 係数 a, b は (1) で得られた値を用い, 係数 c の値だけ変化させることを考える. こ

の場合, 関数 $f(x)$ と逆関数 $f^{-1}(x)$ が 1 点で接するのは, $c = \overset{エ}{\square}$ のときである.

5 方程式 $\sqrt{2x-5} - 1 = ax + 1$ がただ 1 つの実数解を持つときの a の条件を求めよ.

6 不等式 $\sqrt{3x^2-12} \leq x+4$ を満たす x の範囲を求めよ.

7 次の空欄に当てはまる数式を入れよ。（一桁の整数とは限らない）

関数 $y = \cos\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)$ の周期は, $\overset{ア}{\square}$ である. また, この関数のグラフは,

$y = \cos 4x$ のグラフを x 軸方向に $\overset{イ}{\square}$ だけ平行移動したものである.

8 θ に関する方程式 $4\sin^2\theta - 4\cos\theta + 4a - 1 = 0$ ($0^\circ \leq \theta < 360^\circ$) が異なる 4 つの解をもつような定数 a の範囲を求めよ.

9 2 つの楕円 $C_1: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1, C_2: x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$ について

(1) C_1 と C_2 の交点の座標をすべて求めよ.

(2) C_1 の内部と C_2 の内部の共通部分の面積を求めよ.

1 解答 $-3 \leq x < -2, 0 < x \leq 1$

2 解答 $-\sqrt{2} \leq x < 1$

3 解答 $f(f(f(x))) = \frac{x-1}{x+1}$

4 解答 (1) (ア) 3 (イ) 7 (ウ) 4 (2) (エ) $\frac{16}{3}$

5 解答 $-\frac{4}{5} \leq a \leq 0, a = \frac{1}{5}$ のとき

6 解答 $2 - 3\sqrt{2} \leq x \leq -2, 2 \leq x \leq 2 + 3\sqrt{2}$

7 解答 (ア) $\frac{\pi}{2}$ (イ) $\frac{\pi}{8}$

8 解答 $-1 < a < -\frac{3}{4}$

9 解答 (1) $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (複号任意) (2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

① $\frac{3}{1+\frac{2}{x}} \geq x^2$ から $x \neq 0, x \neq -2, \frac{3x}{x+2} \geq x^2$

ゆえに $\frac{x(x-1)(x+3)}{x+2} \leq 0$

よって $-3 \leq x < -2, 0 < x \leq 1$

② $\sqrt{2-x^2} = 2x-1$ とおくと $2-x^2 \geq 0, 2x-1 \geq 0$ より

$\frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ …… ①

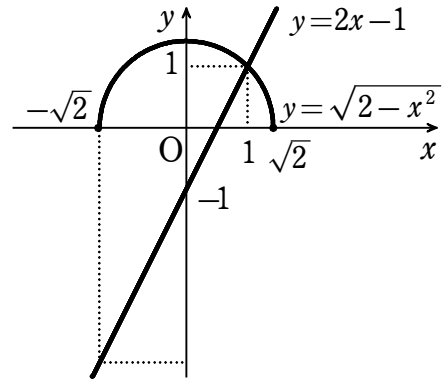
平方して $2-x^2 = 4x^2 - 4x + 1$

$(x-1)(5x+1) = 0$

① から $x = 1$

したがって $y = \sqrt{2-x^2}$ と $y = 2x-1$ のグラフから、

求める解は $-\sqrt{2} \leq x < 1$



③ $f(f(x)) = \left(1 + \frac{1+x}{1-x}\right) / \left(1 - \frac{1+x}{1-x}\right) = -\frac{1}{x}$

$f(f(f(x))) = f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1-1/x}{1+1/x} = \frac{x-1}{x+1}$

④ (1) $f\left(\frac{4}{3}\right) = 0, f(2) = 2, f(3) = 10$ から $\frac{16}{9}a + \frac{4}{3}b + c = 0$ …… ①,

$4a + 2b + c = 2$ …… ②, $9a + 3b + c = 10$ …… ③

②, ③ から $b = 8 - 5a, c = 6a - 14$

これらを ① に代入して $16a + 12(8 - 5a) + 9(6a - 14) = 0$

ゆえに $10a - 30 = 0$ から $a = 3, b = -7, c = 4$

(2) $f(x) = 3x^2 - 7x + c$ $f(x)$ と $f^{-1}(x)$ が 1 点で接するとき、
 $f(x)$ と直線 $y = x$ も 1 点で接する。

$3x^2 - 7x + c = x$ すなわち $3x^2 - 8x + c = 0$ は重解をもつ。

$\frac{D}{4} = 16 - 3c = 0$ から $c = \frac{16}{3}$

5) まず $y = ax + 1$ と $y = \sqrt{2x - 5} - 1$ が接するときを調べる

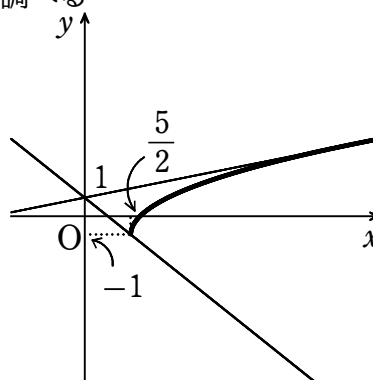
連立して $ax + 1 = \sqrt{2x - 5} - 1$

整理すると $a^2x^2 + 2(2a - 1)x + 9 = 0$

判別式を D とすると $D = 0$ より

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 4a^2 - 4a + 1 - 9a^2 \\ &= -(5a^2 + 4a - 1) \\ &= -(a + 1)(5a - 1) = 0 \end{aligned}$$

グラフから $a = \frac{1}{5}$



(2) $y = ax + 1$ が点 $(\frac{5}{2}, -1)$ を通るのは $a = -\frac{4}{5}$ のとき。

ゆえに、実数解の個数は、グラフから

$$-\frac{4}{5} \leq a \leq 0, a = \frac{1}{5} \text{ のとき } 1 \text{ 個}$$

6) $3x^2 - 12 \geq 0, x + 4 \geq 0$ から $-4 \leq x \leq -2, 2 \leq x$ …… ①

① のとき、与えられた不等式の両辺は 0 以上であるから、両辺を 2 乗して

$$3x^2 - 12 \leq (x + 4)^2$$

整理すると $x^2 - 4x - 14 \leq 0$

これを解くと $2 - 3\sqrt{2} \leq x \leq 2 + 3\sqrt{2}$ …… ②

①, ② から $2 - 3\sqrt{2} \leq x \leq -2, 2 \leq x \leq 2 + 3\sqrt{2}$

7) $y = \cos\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos 4\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$

よって、周期は $2\pi \div 4 = \frac{\pi}{2}$

また、このグラフは、 $y = \cos 4x$ のグラフを x 軸方向に $\frac{\pi}{8}$ だけ平行移動したものである。

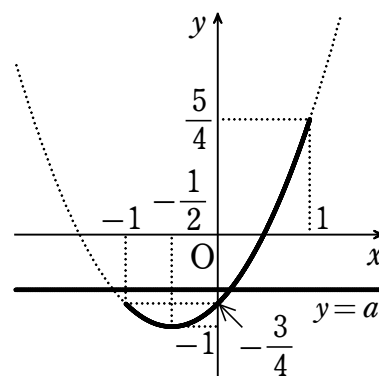
8) $4\sin^2\theta - 4\cos\theta + 4a - 1 = 0$ を変形して

$$a = -\sin^2\theta + \cos\theta + \frac{1}{4}$$

$y = -\sin^2\theta + \cos\theta + \frac{1}{4}$, $\cos\theta = x$ とおくと

$$y = -(1 - x^2) + x + \frac{1}{4} = x^2 + x - \frac{3}{4}$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$



よって、直線 $y = a$ と曲線 $y = x^2 + x - \frac{3}{4}$ との交点が、 $-1 < x < 1$ において 2 つあるとき、与えられた方程式は異なる 4 つの解をもつ。

ゆえに、求める a の値の範囲は、上のグラフから $-1 < a < -\frac{3}{4}$

9 (1) C_1, C_2 は、それぞれ x 軸, y 軸, 原点に関して対称である。

$$C_1 \text{ の方程式から } y^2 = 1 - \frac{x^2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{これを } C_2 \text{ の方程式に代入して } x^2 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x^2}{3}\right) = 1$$

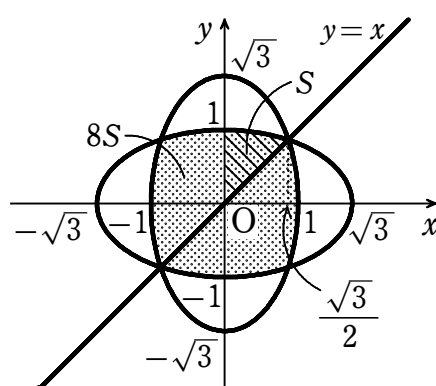
$$\text{これを解くと } x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \textcircled{1} \text{ から } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって、求める交点の座標は $\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (複号任意)

(2) 第1象限における C_1 と C_2 の交点は

点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。

右の図の斜線部分の面積を S とすると、
図形の対称性から、求める面積は $8S$ である。



①において、 $y \geq 0$ とすると

$$y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}}$$

$$\text{よって } S = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}} dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{3 - x^2} dx - \frac{3}{8}$$

ここで、 $x = \sqrt{3} \sin \theta$ とおくと $dx = \sqrt{3} \cos \theta d\theta$
 x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} \text{よって } S &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3 - 3\sin^2 \theta} \cdot \sqrt{3} \cos \theta d\theta - \frac{3}{8} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3} \cos^2 \theta d\theta - \frac{3}{8} = \sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta - \frac{3}{8} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{3}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \frac{3}{8} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} \pi \end{aligned}$$

したがって、求める面積は $8S = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} \pi = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi$