三角比のまとめ

（１）$\boxed{\text{正弦定理}}$　　角と対辺の組＆外接円半径

（２）$\boxed{\text{余弦定理}}$　　二辺夾角で残りの辺を表す

（３）$\boxed{\text{△の面積公式}}$　　二辺夾角で面積を表す

（４）$\boxed{\text{内接円半径公式}}$　　面積三分割で内接円半径とつながる

（注）平面幾何との融合が狙われる
　補助線（つなぐ・のばす・半径・垂線・平行線）
　相似の発見，有名三角形の発見
　諸定理の運用

三大補助線
つなぐのばすはあたりまえ
半径・垂線・平行線

諸定理チェックリスト

三角形の成立条件

円周角の定理，円の内接四角形の性質，接弦定理

方べきの定理（三種）

メネラウスの定理，チェバの定理

トレミーの定理

球の体積と表面積

半径rの球の体積をV，表面積をSとするとき，

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3 \quad , \quad S=4\pi r^2$$

【例題 01】底面の半径がrで，高さhの直円錐Pに，半径１の球Qが内接しているとする。

(1)　r^2をhで表せ。

(2)　Pの体積とQの体積の比が$2:1$であるとき，hの値を求めよ。

相似

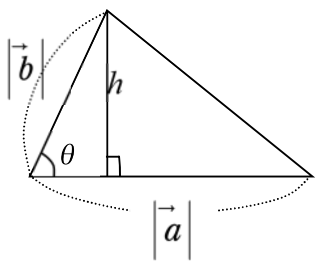
相似比$k:l$のとき，表面積比は$k^2:l^2$，体積比は$k^3:l^3$

【例題 02】体積がVの正四面体の各面の重心を頂点とする正四面体の体積をVを用いて表せ。

三角形の面積公式リスト

図のようにh, θをとると

三角形の面積Sは



①　$S=\dfrac{1}{2}|\vec{a}|h$　$\leftarrow\dfrac{1}{2}\times$底辺$\times$高さ

②　$S=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

③　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ ■

正四面体

【例題 03】一辺の長さを a とすると

（１）　高さ　$h = \boxed{}\,a$

（２）　内接球半径　$r = \boxed{}\,h$

（３）　外接球半径　$R = \boxed{}\,h$

【例題 04】阪大

一辺の長さが１の正四面体の内部に互いに外接する２つの球 P，Q がある。球 P は正四面体の４面全部に接し，球 Q は正四面体の３面に接しているとする。

(1) 球 P の半径 r_0 を求めよ。

(2) 球 Q の半径 r_1 を求めよ。

等面四面体 各面が合同な三角形であるような四面体のこと

【例題 05】東大

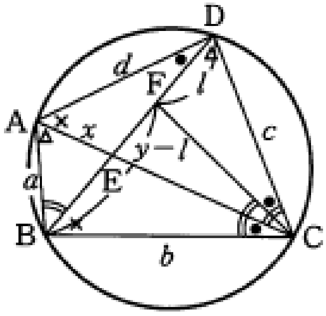
３辺の長さが $\mathrm{BC} = 2a,\ \mathrm{CA} = 2b,\ \mathrm{AB} = 2c$ であるような鋭角三角形 ABC の３辺 BC,CA，AB の中点をそれぞれ L，M，N とする。線分 LM，MN，NL に沿って三角形を折り曲げ，四面体をつくる。この四面体の体積を求めよ。

トレミーの定理

円の内接四角形 ABCD において，

AB・CD+AD・BC=AC・BD

（証明）



$AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $AC=x$, $BD=y$ とおく．

∠ACB≦∠DCA としても一般性を失わない．

∠DCF=∠BCA となる点 F を対角線 BD 上にとり，$DF=l$ とおく．

円周角の定理より，

$$\angle BAC=\angle FDC.$$

∠DCF=∠ACB より，

$$\triangle ABC \backsim \triangle DFC.$$

よって，AB：AC=DF：DC．これより，

$$a : x = l : c. \quad \cdots ①$$

同様に，円周角の定理より，∠DAC=∠FBC．

∠DCA=∠FCB より，△ACD∽△BCF．

よって，　AD：AC=BF：BC．

これより，　$d : x=(y-l) : b.$　…②

① より　$ac=lx.$　…③

② より　$bd=x(y-l).$　…④

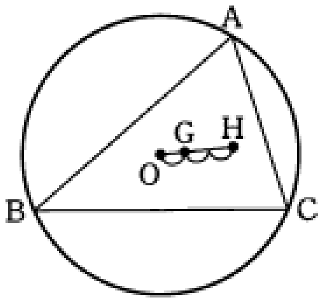
③+④ より　$ac+bd=xy.$

すなわち，　AB・CD+AD・BC=AC・BD. ∎

円に内接する四角形において，二本目の対角線の長さを求めるのに有効

正五角形の対角線の長さを求めるのに有効

オイラー線



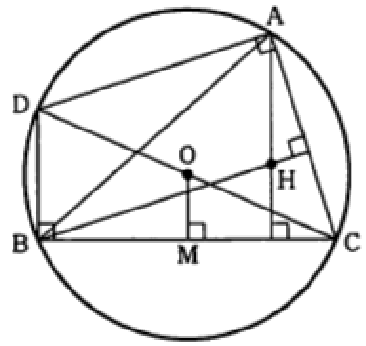
三角形 ABC の外心を O，重心を G，垂心を H とすると，3 点 O, G, H は同一直線上にあり，

$$\mathrm{OG} : \mathrm{GH} = 1 : 2$$

である．

(証明)　直線 CO と円の交点を D とすると，CD は円の直径であるから，DB⊥BC.

AH⊥BC より，DB∥AH.



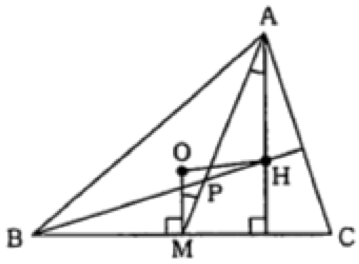
同様に，DA∥BH が示せるので，四角形 ADBH は平行四辺形である．したがって，

$$\mathrm{DB} = \mathrm{AH}.$$

ここで，DO=OC より，辺 BC の中点を M とすると，

$$\mathrm{OM} = \frac{1}{2}\mathrm{DB} = \frac{1}{2}\mathrm{AH}.$$

次に線分 OH と線分 AM の交点を P とする．



AH∥OM より，∠OMP=∠HAP.

したがって，△OMP∽△HAP.

$$\mathrm{OM} : \mathrm{HA} = \mathrm{MP} : \mathrm{PA}.$$

OM : HA=1 : 2 より，MP : PA=1 : 2.

P は中線 AM を 2 : 1 に内分する点であるから，三角形 ABC の重心である．P=G.

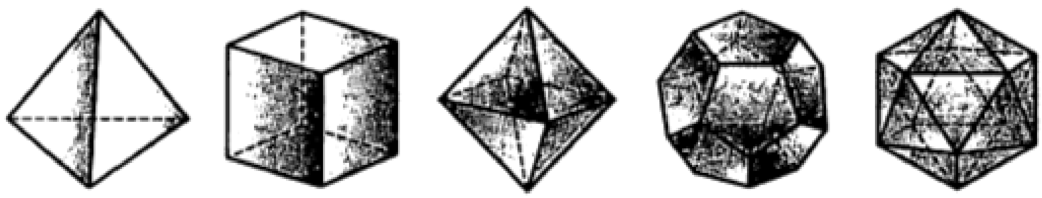
$$\mathrm{OP} : \mathrm{PH} = \mathrm{OG} : \mathrm{GH} = \mathrm{OM} : \mathrm{HA} = 1 : 2$$

より，G(P) は線分 OH を 1 : 2 に内分する点である．

したがって，3 点 O, G, H は同一直線上にあり，

$$\mathrm{OG} : \mathrm{GH} = 1 : 2. \ ∎$$

正多面体



正四面体　正六面体（立方体）　正八面体　正十二面体　正二十面体

正多面体	面の数 f（面の形）	頂点の数 v	辺の数 e
正四面体	4（正三角形）	4	6
正六面体	6（正方形）	8	12
正八面体	8（正三角形）	6	12
正十二面体	12（正五角形）	20	30
正二十面体	20（正三角形）	12	30

オイラーの多面体定理

一般に，凸多面体の頂点，辺，面の数をそれぞれv, e, f とすると次の等式が成り立つ。

$$v-e+f=2$$

談話室マロニエ　数学 QUIZ　三角比

A 問題

三角比の定義を確認せよ。

相互関係

①$\sin\theta$, $\cos\theta$ の関係は $\boxed{\text{ア}}$,

②$\tan\theta$ を $\sin\theta$, $\cos\theta$ で表すと，$\boxed{\text{イ}}$,

③$\tan\theta$, $\cos\theta$ の関係は，$\boxed{\text{ウ}}$

△ABC において，AB $= c$, BC $= a$, CA $= b$ とし，∠A $= A$, ∠B $= B$, ∠C $= C$ とする。
　また，内接円の半径を r，外接円の半径を R とする。

正弦定理は，$\boxed{\text{ウ}}$

余弦定理は，$\boxed{\text{エ}}$ ← A を含む形で

三角形の面積は，$\boxed{\text{オ}}$ ← A を含む形で

内接円の半径を求める公式は，$\boxed{\text{カ}}$

三角形の成立条件は，3 つの式で表すと $\boxed{\text{キ}}$。1 つの式で表すと $\boxed{\text{ク}}$。← a を主役に

三角形 ABC の角 A が鋭角である条件は，$\boxed{\text{ケ}}$。

B 問題

正弦定理の証明のポイントは，$\boxed{\text{コ}}$ である。

余弦定理の証明はいくつかあるが，例えば $\boxed{\text{サ}}$ を用いればできる。

三角形の面積公式の証明のポイントは，$\boxed{\text{シ}}$ である。

内接円の半径を求める公式のポイントは，$\boxed{\text{ス}}$ である。

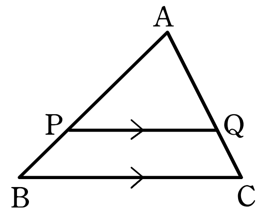
談話室マロニエ　数学 QUIZ　平面幾何

A 問題

平行線に沿った比の移動

右図で PQ//BC のとき，

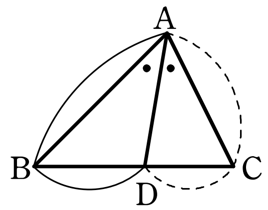
AP：PB＝ ア



内角の二等分線に沿った比の移動

右図で線分 AD が角の二等分線のとき，

イ

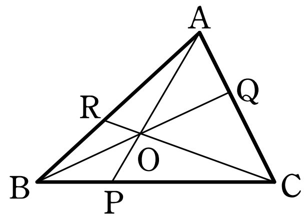


証明のための補助線を描け。 ウ

（注）外角の場合が B 問題にあります。

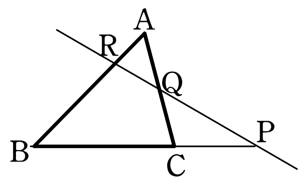
チェバの定理

右図で エ



メネラウスの定理

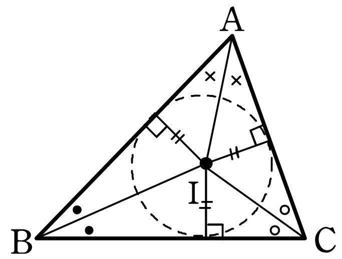
右図で オ



三角形の内心（その性質）

内心＝内接円の中心

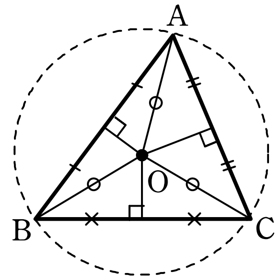
＝ [＊]



三角形の外心（その性質）

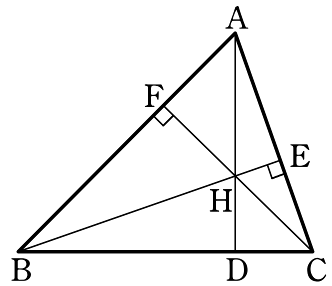
外心＝外接円の中心

＝ [＊]



三角形の垂心（その性質）

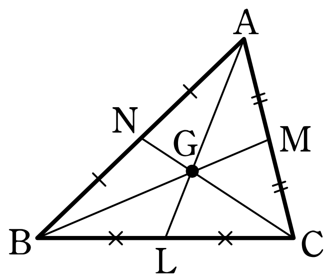
垂心＝各頂点から対辺に下した垂線の交点



三角形の重心（その性質）

重心＝中線の交点　（中線＝頂点と対辺の中点を結んだ線分）

（性質） [＊]

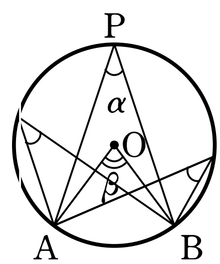


円周角の定理

弧 AB に対して,

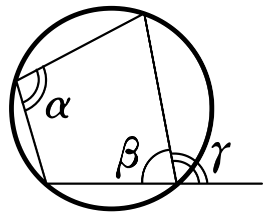
∠AOB を中心角, ∠APB のような角を円周角という

（性質） [＊]



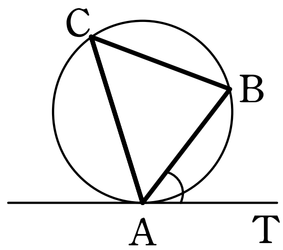
円の内接四角形の性質

右図での性質＝ ＊



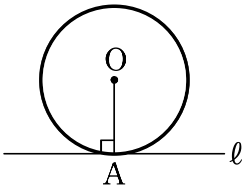
接弦定理

右図での性質＝ ＊

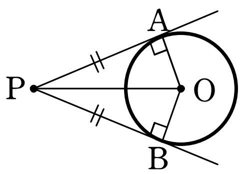


円の接線の性質

①

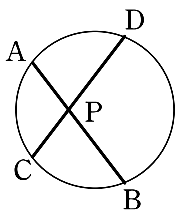


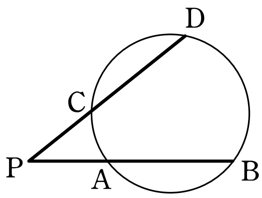
②



方べきの定理

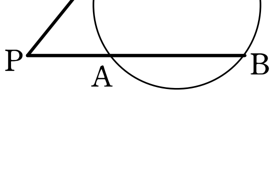
①内・外





左図での性質＝ ＊

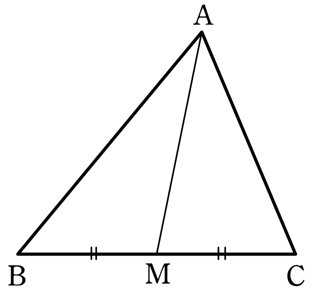
②接



左図での性質＝ ＊

《補足》

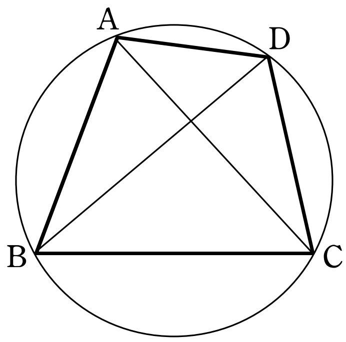
中線定理



△ABC において，辺 BC の中点を M とすると

（性質）　＊

トレミーの定理

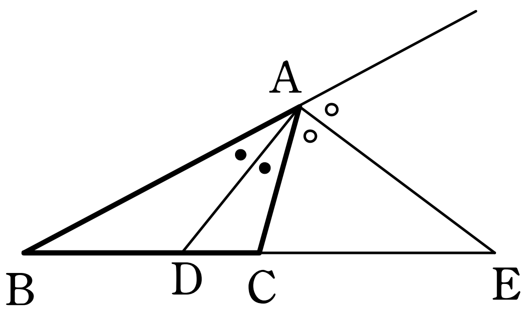


四角形 ABCD が円に内接するとき

（性質）　＊

B 問題

外角の二等分線の場合



右図で線分 AD が角の二等分線のとき，

（性質）　＊

証明のための補助線を描け。　＊

【MEMO】

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより
三角比編

標準問題

（夏12）標-1-1

円 O に内接する四角形において，AB＝3，BC＝2，CD＝2，DA＝4 とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　AC の長さを求めよ。

(2)　四角形 ABCD の面積を求めよ。

(3)　円 O の半径 R を求めよ。

(4)　△ABC の内接円の半径 r を求めよ。

（夏12）標-1-2

△ABC において $\sin C-\sin B=2(\cos B-\cos C)\sin A$ が成り立つとき，この三角形はどのような形をしているか。

（夏12）標-1-3

四角形 ABCD は円に内接し，4 辺の長さは AB＝BC＝7，CD＝5，DA＝3 である。

(1)　対角線 AC，DB の長さを求めよ。

(2)　AC と DB の交点を E とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ で表せ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ で表せ。

（夏12）標-1-4

点 P は正方形 ABCD の頂点 A から正方形の内部に向かって出発し，次の 3 つの規則に従って動くものとする。

1. P が正方形の内部にあるときは直進する。
2. P が正方形の辺上に達したのちの P の進み方は, その辺を鏡とみなして光の反射の法則に従う。
3. P が正方形の頂点に達したときはそこで止まる。

点 P が A から出発するときの方向が辺 AB となす角を θ として，次の問いに答えよ。

(1)　$\tan\theta = 0.6$ のとき，点 P は A, B, C, D のうち，どの頂点に止まるか。

(2)　P が頂点 B, C, D のそれぞれに止まるために $\tan\theta$ の値がみたすべき条件をそれぞれ説明せよ。

発展問題

（夏12）発-1-1

　鋭角三角形 ABC 内の点 P から 3 辺 BC，CA，AB に下ろした垂線の長さをそれぞれ x, y, z とする。P が外心，重心，垂心となったそれぞれの場合について，比 $x:y:z$ を ∠A=A，∠B=B，∠C=C を用いて表せ。

（夏12）発-1-2

△ABC において，BC=a，CA=b，AB＝c，面積を S，周の長さを $2s$ とする。外接円と内接円の半径をそれぞれ R，r とするとき，次の式が成立することを証明せよ。

(1)　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(2)　$\dfrac{r}{R}=\dfrac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$

（夏12）発-1-3

1 辺 a cm の正方形の紙 ABCD を，B が辺 AD の上にくるように折り返すとき，折り返された部分の面積が最小になるのは，どんな折り方をした場合か。また，その場合の面積を求めよ。

（夏12）発-1-4

円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。

（夏12）$\boxed{\text{発-1-5}}$

△ABC を鋭角三角形とし，その内角を A, B, C で表す。

(1)　$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ を証明せよ。

(2)　$P = \tan A + \tan B + \tan C$ とおくとき，P の最小値を求めよ。また，そのときの△ABC の形状を答えよ。

（夏12）$\boxed{\text{発-1-6}}$

原点を中心とする半径 1 の円 O の周上に定点 A と動点 P をとる。

(1)　円 O の周上の点 B，C で $\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2$ が P の位置によらず一定であるようなものを求めよ。

(2)　点 B，C が(1)の条件を満たすとき，PA＋PB＋PC の最大値と最小値を求めよ。

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより 平面図形篇

①標-2-1

3 辺の長さが $2x+1,\ x^2-1,\ x^2+x+1$ である三角形について，

（1）$2x+1,\ x^2-1,\ x^2+x+1$ が三角形の 3 辺となるための x の条件を求めよ。

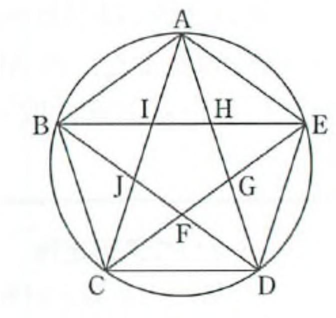
（2）最大辺に対する角の大きさを求めよ。

①標-2-2

三角形 ABC は AB＝5，AC＝6，BC＝7 を満たすとする。辺 AB 上に点 P を取り，AP＝t とおく。$(0<t<5)$。また，辺 AC の C の側への延長上に点 Q を，三角形 ABC の面積と三角形 APQ の面積が等しくなるように取り，BC と PQ の交点を M とする。BM の長さおよび AQ の長さを t で表せ。

①標-2-3

円に内接する 1 辺の長さが 1 の正五角形 ABCDE がある。点 F，G，H，I，J は対角線の交点である。



（1）△ABE と△IBA が相似であることを示せ。
　また EI を求めよ。

（2）BE，BI の長さを求めよ。

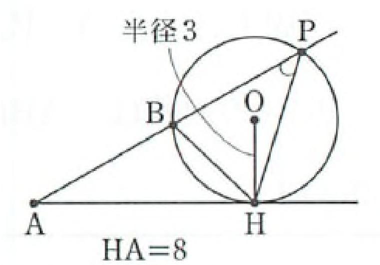
（3）正五角形 ABCDE の面積を S_1，五角形 FGHIJ の面積を S_2 とおくとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ の値を求めよ。

①標-2-4

円周上に4点A，B，C，Dをこの順に時計と逆回りにとる。△ABCと△ACDの面積が等しく，△BCDの面積は△ABDの面積の3倍である。さらに$AB=\frac{\sqrt{3}}{3}$，AD＝1であるとき，AC，BDを求めよ。

①標-2-5

右図のように半径3の円Oの周上の点Hにおける接線を引き，その上にHA＝8となる点Aをとる。円周上の点PとAとを結ぶ直線が円Oと2点で交わるとし，そのもう1つの点をBとする。このとき，Bは線分PA上にあるとする。$\sin\angle BPH=\frac{12}{13}$のとき，次のそれぞれの値を求めよ。



（1）BH　（2）AB　（3）AP　（3）△APHの面積

①標-2-6

AB＝5，BC＝7，CA＝3の△ABCにおいて，∠Aの2等分線が△ABCの外接円と交わる点をD，BCとADとの交点をEとするとき，次の値を求めよ。

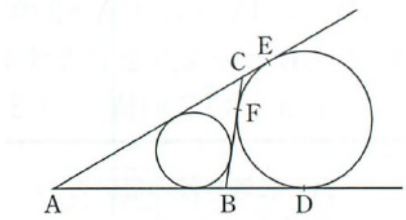
（1）cos∠BACの値

（2）AEの長さ

（3）ADの長さ

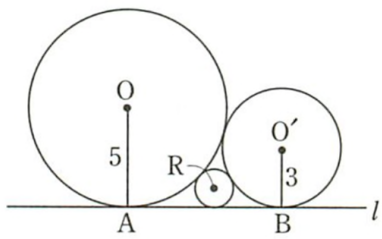
①標-2-7

右図のように，△ABC において，AB＝6，CA＝$4\sqrt{3}$，∠BAC＝30°，∠A 内の傍接円（辺 BC および辺 AC,AB の延長に接する円）の接点を D，E，F とするとき，BC＝$\boxed{}$となり，△ABC の内接円の半径は$\boxed{}$である。また，FC＝$\boxed{}$となり，傍接円の半径は$\boxed{}$である。



①標-2-8

右図のように半径 5 の円O と半径 3 の円O′が接しており，この 2 つの円に直線lが点 A，B で接している。さらに円O，円O′，直線lに接する円R がある。このとき，AB＝$\boxed{}$であり，円R の半径の長さr はr ＝$\boxed{}$である。



【MEMO】