# YAWARAKA 先生のテキスト 解答 ⑫5　場合の数

## 標準問題

【１】

(2)　8 文字から A または E を除く場合は $\frac{7!}{2!}$，そのほかの文字を除く場合は $\frac{7!}{2!2!}$ であるから

$$\frac{7!}{2!}\times 2+\frac{7!}{2!2!}\times 4=2\times 7!=10080 \text{ 通り}\quad \cdots\cdots(\text{答})$$

【２】（１）48 通り　（２）12 通り

【３】組分け問題

（１）${}_{12}C_5\times{}_7C_4=27720$（通り）　（２）$\frac{34650}{3!}=5775$（通り）　（３）$\frac{{}_{12}C_8\times{}_4C_2}{2!}=1485$（通り）

【４】（１）10 個のリンゴを 4 人に分ける＝3 か所で仕切ると考えて，$\frac{(10+3)!}{10!\times 3!}=286$ 通り。

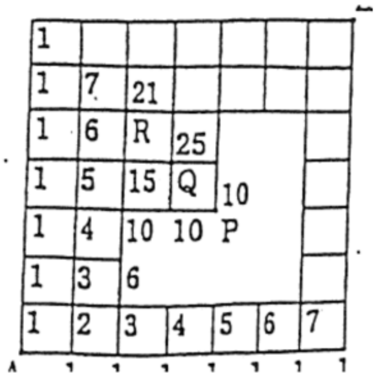
（２）4 人に 1 つずつ分けておき，残り 6 個のリンゴを 3 か所で仕切ると考えて，$\frac{(6+3)!}{6!\times 3!}=84$ 通り

【５】16 通り

【６】

(1) 100 通り　(2) 625 通り　(3) 441 通り　(4) 1266 通り

《参考》



# 発展問題

## 【１】

**解答**　(1)　AA, AE, AK, AM で始まる列はどれも $\frac{6!}{2!}=360$ 個　ある。この合計が　1440 個。

ATA, ATE, ATK, ATM で始まる列はどれも $5!=120$ 個ある。ここまでで　$1440+120\times4=1920$ 個

ATTA, ATTE で始まる列は, $4!=24$個ある。

ATTKA, ATTKE, ATTKM で始まる列は, $3!=6$ 個ある。ここまでで, $1920+24\times2+6\times3=1986$ 個ある。

そして,

ATTKUAEM, ATTKUAME, ATTKUEAM

と続いて, 1990 番目は,　ATTKUEMA　……(答)

(2)　AAKTTUME が何番目に配列されるかを調べる。

AAE――――60 個
AAKE――――12 個
AAKM――――12 個
AAKTE―――6 個
AAKTM―――6 個
AAKTTE――2 個
AAKTTM――2 個

合計 100 個

よって, 102 番目である。　……(答)

← ATで始まる列は　$6!=720$個

← AT が使われたら残りの文字はどれも異なる。

← ATTKU○○○までわかった。

← K, M, T, T, U の順列。

← AAKTTUEM が101番目である。

## 【２】

**解説**　T 2 つを○, O 3 つを□で表すことにする.

(1)　Tが 2 つ隣り合い, Oが 3つ隣り合う並べ方の数は, ○, □, K, Y の並べ方の数に等しいから

$4!=24$　通り

(2)　O は 3 つ隣り合うが, 2 つの T は隣り合わないように並べるには, まず, □, K, Y を並べて, それらの間および両端の 4 カ所から 2 カ所を選んで T をおけばよい.

よって, 求める並べ方の数は　$3!\times{}_4C_2=36$　通り

(3)　2 つの T は隣り合うが, 3 つの O はどの 2 つも隣り合わないように並べるには, まず, ○, K, Y を並べて, それらの間および両端の 4 カ所から 3 カ所を選んで O をおけばよい.

よって, 求める並べ方の数は　$3!\times{}_4C_3=24$　通り

(4)　同じ文字が全く隣り合わない並べ方の数を求めるには, 3 つの O がどの 2 つも隣り合わない ( 2 つの T は隣り合ってもよい) 並べ方の数を求めて, この数から(3)の結果を引けばよい.

3 つの O がどの 2 つも隣り合わないためには, まず, T, T, K, Y を並べて, それらの間および両端の 5 カ所から 3 カ所を選んで O をおけばよいので,

$\frac{4!}{2!}\times{}_5C_3=120$　通り

よって, 求める並べ方の数は

$120-24=96$　通り

## 【３】286 通り

# 【おまけ】診断テスト（発展編）【例題１２】の答え

**解答▶** **(1)** 各ボールについて3通りの入れ方があるから，求める総数は

$\mathbf{3^n}$**通り** 答

**(2)** A，B，C に入れるボールの個数をそれぞれ $a$，$b$，$c$ とすると

$$a+b+c=n,\ a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0 \quad \cdots\cdots ①$$

求める分け方の総数は，①の整数解 $(a,\ b,\ c)$ の個数に等しいから

$${}_3\mathrm{H}_n = {}_{n+2}\mathrm{C}_n = \boldsymbol{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}\textbf{通り}$$ 答

**(3)** (i) 空箱がないとき，$p$ 通り

(ii) 空箱が1個のとき，$q$ 通り

であるとする．また

(iii) 空箱が2個のとき，1通り

である．

(i)，(ii) の各々は箱を区別した場合の6通りの分け方に対応し，(iii) は箱を区別した場合の3通りの分け方に対応する．

よって，(1) より

$$6(p+q)+3=3^n$$

$$\therefore \quad p+q=\frac{3^{n-1}-1}{2}$$

ゆえに，求める総数は

$$p+q+1=\boldsymbol{\frac{3^{n-1}+1}{2}}\textbf{通り}$$ 答

**(4)** (i) 3つの箱に入ったボールの個数が互いに異なるとき

$k$ 通り

であるとする．

(ii) 2つの箱に入ったボールの個数だけが等しいとき，ボールの個数の組合せは

$$\begin{cases} (0,\ 0,\ 6m) \\ (1,\ 1,\ 6m-2) \\ \quad\vdots \\ (3m,\ 3m,\ 0) \end{cases}$$

から，$(2m,\ 2m,\ 2m)$ を除いたものだから

$3m$ 通り

(iii) 3つの箱に入ったボールの個数が等しいとき

1通り

(i) の各々は箱を区別した場合の6通りの分け方に対応し，(ii) の各々は箱を区別した場合の3通りの分け方に対応する．また，(iii) の場合は箱を区別しても同じ1通りである．

よって，(2) より

$$6k+3\cdot 3m+1=\frac{(6m+2)(6m+1)}{2}$$
$$=18m^2+9m+1$$

$$\therefore \quad k=3m^2$$

ゆえに，求める総数は

$$k+3m+1=\mathbf{3m^2+3m+1}\textbf{通り}$$ 答

**発展問題**

**【解答１】** <M320M23> 2011 獨協医科大学 1/29,一般（１次） 医

(1) ア．　2　イ．　9

(2) ウ．　1　エ．　2

(3) オカ．　-1　キ.2　クケ．　-1

**＜完全順列の場合の数＞**

$n=1$ のときは箱の番号と球の番号が一致するから

$$a_1=0$$

$n=2$ のときは，箱の番号と球の番号がすべて異なるのは，箱1に球2，箱2に球1の1通りだけだから

$$a_2=1$$

(1) $n=3$ のとき

| 箱の番号 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 球の番号 | 2 | 3 | 1 |
| | 3 | 1 | 2 |

の2通りあるから　　$a_3=2$　(→ア)

$n=4$ のとき

| 箱の番号 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 球の番号 | 2 | 1 | 4 | 3 |
| | 2 | 3 | 4 | 1 |
| | 2 | 4 | 1 | 3 |
| | 3 | 1 | 4 | 2 |
| | 3 | 4 | 1 | 2 |
| | 3 | 4 | 2 | 1 |
| | 4 | 1 | 2 | 3 |
| | 4 | 3 | 1 | 2 |
| | 4 | 3 | 2 | 1 |

の9通りあるから　　$a_4=9$　(→イ)

(2) $a_{n+1}$ について，球 $n+1$ を箱1に入れる場合を考える。

まず，球1が箱 $n+1$ に入る場合は，箱1と箱 $n+1$ を除く残り $n-1$ 個の箱の番号と球の番号がすべて異なるように入れればよいから，入れ方は $a_{n-1}$ 通りある。

| 箱の番号 | 1 | 2　3　…　$n$ | $n+1$ |
|---|---|---|---|
| 球の番号 | $n+1$ | $\underbrace{\qquad\qquad}_{n-1\text{個}}$ | 1 |

次に，球 1 が箱 $n+1$ に入らない場合は，箱 $n+1$ を箱 1 とみなし，$n$ 個の箱と番号がすべて異なるように入れる入れ方と一致するから，その入れ方は $a_n$ 通りある。

| 箱の番号 | $1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad n \quad n+1$ |
|---|---|
| 球の番号 | $n+1 \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n\text{個}} \quad 1$ 以外 |

よって，球 $n+1$ を箱 1 に入れる場合は

$$a_{n-1}+a_n \text{ 通り} \quad (\to ウ)$$

だけあることがわかる。

球 $n+1$ が箱 2 ～ $n$ に入る場合も同様に $a_{n-1}+a_n$ 通りあるから

$$a_{n+1}=n(a_{n-1}+a_n) \quad (n \geqq 2) \quad (\to エ)$$

$a_{n+1}=n(a_{n-1}+a_n)$ で $n=2$，3 とおくと

$$a_3=2(a_1+a_2)=2(0+1)=2$$

$$a_4=3(a_2+a_3)=3(1+2)=9$$

となり，確かに(1)の結果と一致する。

(3) $n \geqq 2$ のとき，$a_{n+1}=n(a_{n-1}+a_n)$ を変形すると

$$a_{n+1}-(n+1)a_n=-(a_n-na_{n-1})$$

となるので，数列 $\{a_n-na_{n-1}\}$ は公比 $-1$ の等比数列をなす。よって

$$\begin{aligned} a_n-na_{n-1} &= (a_2-2a_1)\cdot(-1)^{n-2} \\ &= (1-2\times 0)\cdot(-1)^{n-2} \\ &= (-1)^{n-2}=(-1)^n \quad (\to オカ) \end{aligned}$$

(4) $n \geqq 2$ のとき，$a_n-na_{n-1}=(-1)^n$ の両辺を $n!$ で割ると

$$\frac{a_n}{n!}-\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}=\frac{(-1)^n}{n!}$$

上式において $n$ を 2，3，…，$n$ とおいて辺々加える。

$$\frac{a_2}{2!}-\frac{a_1}{1!}=\frac{(-1)^2}{2!}$$

$$\frac{a_3}{3!}-\frac{a_2}{2!}=\frac{(-1)^3}{3!}$$

$$\frac{a_4}{4!}-\frac{a_3}{3!}=\frac{(-1)^4}{4!}$$

$$\vdots$$

$$
\begin{array}{r}
+\big) \quad \dfrac{a_n}{n!}-\dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!}=\dfrac{(-1)^n}{n!} \\
\hline
\dfrac{a_n}{n!}-\qquad \dfrac{a_1}{1!} \qquad =\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}
\end{array}
$$

$a_1=0$ を用いて

$$\frac{a_n}{n!}=\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \quad (\rightarrow キ\sim ケ)$$

【解答２】2012 東海大学 2/2,

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | ア | $b_n+c_n$ | イ | $b_n$ | | |
| (2) | ウ | 1 | エ | $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ | オ | $-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ |
| (3) | カ | $\dfrac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$ | キ | $\dfrac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha^n-\beta^n}$ | ク | $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ |

(1) $n \geqq 3$ のとき　$\dfrac{c_{n+1}}{b_{n+1}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{c_n}{b_n}}=\dfrac{b_n}{b_n+c_n}$　……①

ここで，$b_n$ と $b_n+c_n$ が公約数 $k$ $(k>1)$ を持つとすると，$b_n=kl$, $b_n+c_n=kl'$ （$l$, $l'$ は自然数）とかける。

$c_n=kl'-b_n=k(l'-l)$ となり，$b_n$ と $c_n$ は公約数 $k$ $(k>1)$ を持つことになり，$b_n$ と $c_n$ が互いに素であることに矛盾する。

したがって，$b_n$ と $b_n+c_n$ は互いに素である。

①より

$$b_{n+1}=b_n+c_n \quad \cdots\cdots ②$$

$$c_{n+1}=b_n \quad \cdots\cdots ③$$

また，$b_1=1$, $c_1=0$, $b_2=c_2=1$, $a_3=\dfrac{1}{1+a_2}=\dfrac{1}{2}$ より，$b_3=2$, $c_3=1$ である。

②，③は $n=1$, 2 のときも成り立つ。

よって，すべての自然数 $n$ について

$$b_{n+1}=b_n+c_n \quad , \quad c_{n+1}=b_n \quad \to ア，イ$$

(2) $n \geqq 2$ のとき　$c_{n+1}=b_n=b_{n-1}+c_{n-1}$

また，$b_{n-1}=c_n$ より　$c_{n+1}=c_n+c_{n-1}$

これより　　$p=1$　→ウ

$$c_{n+1}-c_n-c_{n-1}=0 \quad \cdots\cdots④$$

ここで $t^2-t-1=0$　……⑤の解を $\alpha$, $\beta$ ($\alpha>\beta$) とおくと

$$\alpha+\beta=1 \quad , \quad \alpha\beta=-1$$

このとき，④は，$c_{n+1}-(\alpha+\beta)c_n+\alpha\beta c_{n-1}=0$　……④′とかける。

④′より

$$c_{n+1}-\alpha c_n=\beta(c_n-\alpha c_{n-1}) \quad \cdots\cdots⑥$$

$$c_{n+1}-\beta c_n=\alpha(c_n-\beta c_{n-1}) \quad \cdots\cdots⑦$$

と変形できる。

したがって，⑤より　　$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　，　$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$　→エ，オ

(3)　$c_2-\alpha c_1=1$，$c_2-\beta c_1=1$，よって⑥，⑦より

$$c_{n+1}-\alpha c_n=\beta^{n-1} \quad \cdots\cdots⑧$$

$$c_{n+1}-\beta c_n=\alpha^{n-1} \quad \cdots\cdots⑨$$

⑨－⑧より　　$c_n=\dfrac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$　→カ

$$a_n=\frac{c_n}{b_n}=\frac{c_n}{c_{n+1}}=\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha^n-\beta^n} \quad \to キ$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha^n-\beta^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}{1-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n}$$

$$=\frac{1}{\alpha} \quad \left(|\alpha|>|\beta| \text{ より } \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|<1,\ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\to 0\right)$$

$$=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \to ク$$