試験時間60分　　解答は解答用紙に書いて、提出してください

$\boxed{1}$ $f(x)$ の $x=1$ における微分係数が存在するとき，次の極限値を $f(1)$，$f'(1)$ で表せ。

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x^3f(1)}{x-1}$$

$\boxed{2}$ 関数 $y=x^3-12x$ の区間 $-1\leqq x\leqq 3$ における最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{3}$ k は定数とする。3 次関数 $f(x)=x^3-3x^2-4x+k$ について，方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 つの整数解をもつとき，k の値およびその整数解を求めよ。

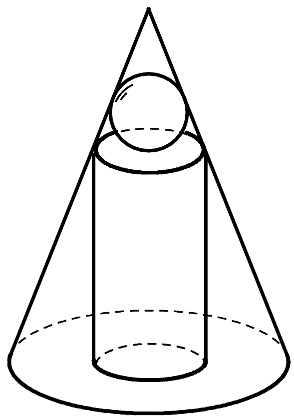
$\boxed{4}$ 関数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2+4(a^2-9)x+1$ において

(1)　$f(x)$ が極大値，極小値をもつための a の値の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ が $x>0$ で極大値，極小値をもつための a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{5}$ $f(x)=2x^2-4x+3$，$g(x)=-x^2-2x-2$ とする。
放物線 $y=f(x)$ と放物線 $y=g(x)$ の両方に接する 2 本の直線の交点を求めよ。

$\boxed{6}$ 図のように，円錐 T と，その内部にあって T に接する円柱 S がある．T の底面の直径は $4\sqrt{2}$，高さは 8 とし，S の底面の直径は $2x$ とする．また，この円柱 S および円錐 T の両方に接する球 U を考える．



S の高さは $\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\,x$ である．

S の体積を $f(x)$ とすると，その導関数 $f'(x)$ に関して，

等式 $\dfrac{1}{\pi}f'(x)=\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\,x^2+\boxed{\text{カ}}\,x$

が成り立つ．したがって，$f(x)$ は $x=\boxed{\text{キ}}$ のとき最大となる．

U の半径を r とすると，$r=\dfrac{x}{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}$ である．S の体積と U の体積の和を $g(x)$ とおくと，その導関数 $g'(x)$ に関して，等式 $\dfrac{1}{\pi}g'(x)=\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}\,x^2+\boxed{\text{サ}}\,x$

が成り立つ．したがって，$g(x)$ は $x=\boxed{\text{シ}}$ のとき最大となる．

$\boxed{7}$ ＊　science の 7 個の文字を横 1 列に並べるとき，その並べ方は $\boxed{\text{ア}}$ 通りある。このうち，s が i より左にあり，n が i より右にあるものは，$\boxed{\text{イ}}$ 通りある。

$\boxed{8}$ ＊　円 $x^2+y^2+2x+4y-4=0$ と直線 $7x-y+2=0$ の 2 つの交点 A，B を通り，点 $(-1,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ。

$\boxed{1}$ 解答　$f'(1)-3f(1)$

$\boxed{2}$ 解答　$x=-1$ のとき最大値 11，$x=2$ のとき最小値 -16

$\boxed{3}$ 解答　(1)　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{3}$

(2)　$k=0$ のとき $x=-1$，0，4；
$k=12$ のとき $x=-2$，2，3

$\boxed{4}$ 解答　(1)　$-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$　　(2)　$3<a<2\sqrt{3}$

$\boxed{5}$ 解答　点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

$\boxed{6}$ 解答　(ア)　8　(イ)　2　(ウ)　2　(エ)　-6　(オ)　2　(カ)　16
(キ)　$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$　(ク)　2　(ケ)　-5　(コ)　2　(サ)　16　(シ)　$\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$

$\boxed{7}$ 解答　(ア)　1260　(イ)　210

$\boxed{8}$ 解答　$x^2+y^2+9x+3y-2=0$

$\boxed{1}$ $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$ であるから

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-x^3f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)-x^3f(1)+f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-\frac{x^3-1}{x-1}\cdot f(1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-(x^2+x+1)f(1)\right\}$$
$$=f'(1)-(1+1+1)f(1)=f'(1)-3f(1)$$

$\boxed{2}$ $y'=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$-1\leqq x\leqq3$ における y の増減表は，右のようになる。

x	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$-$	0	$+$	
y	11	↘	-16	↗	-9

よって，y は　$x=-1$ のとき最大値 11，
$x=2$ のとき最小値 -16　をとる。

$\boxed{3}$ (1)　$f(x)=x^3-3x^2-4x+k$ から　　$f'(x)=3x^2-6x-4$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{3}$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$f(x)$ が極値をとるときの x の値は　　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{3}$

(2)　$x^3-3x^2-4x+k=0$ ……① から　　$-x^3+3x^2+4x=k$

$g(x)=-x^3+3x^2+4x$ とおくと　　$g'(x)=-3x^2+6x+4$

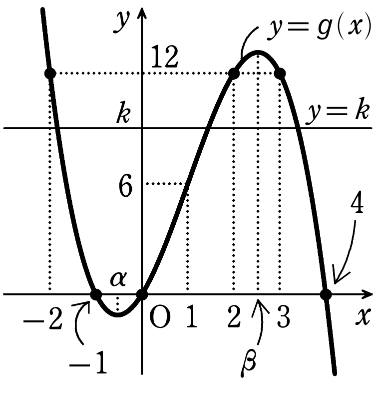
$g'(x)=0$ とすると

$$x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{3}$$

$g(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

よって，$y=g(x)$ のグラフは，右の図のようになる。
方程式 $f(x)=0$ の実数解は，$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の x 座標と一致する。
ゆえに，$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=k$ が 3 つの共有点をもち，かつその共有点の x 座標がすべて整数であるような k の値を求めればよい。



ここで，$\alpha=\dfrac{3-\sqrt{21}}{3}$，$\beta=\dfrac{3+\sqrt{21}}{3}$ とおくと，

$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=k$ が 3 つの共有点をもつための条件は　　$g(\alpha)<k<g(\beta)$

また，$4<\sqrt{21}<5$ であるから　　$-1<\alpha<0$，$2<\beta<3$

よって，$\alpha<x<\beta$ を満たす整数 x は　　$x=0,\ 1,\ 2$

$g(0)=0$，$g(1)=6$，$g(2)=12$ であるから，求める k の値の候補は　　$k=0,\ 6,\ 12$

[1]　$k=0$ のとき

①は　　$x^3-3x^2-4x=0$　　　よって　　$x(x^2-3x-4)=0$

すなわち　　$x(x+1)(x-4)=0$　　　ゆえに　　$x=0,\ -1,\ 4$

したがって，$f(x)=0$ は3つの整数解をもつ。

[2]　$k=6$ のとき

①は　　$x^3-3x^2-4x+6=0$　　　すなわち　　$(x-1)(x^2-2x-6)=0$

よって　　$x=1,\ 1\pm\sqrt{7}$

ゆえに，$f(x)=0$ の整数解は1つだけである。

[3]　$k=12$ のとき

①は　　$x^3-3x^2-4x+12=0$　　　よって　　$(x-2)(x^2-x-6)=0$

すなわち　　$(x-2)(x+2)(x-3)=0$　　　ゆえに　　$x=2,\ -2,\ 3$

したがって，$f(x)=0$ は3つの整数解をもつ。

[1]～[3]より，求める k の値は　　$k=0,\ 12$

また，3つの整数解は，$k=0$ のとき　　$x=-1,\ 0,\ 4$

$k=12$ のとき　　$x=-2,\ 2,\ 3$

4 (1)　$f'(x)=x^2-2ax+4(a^2-9)$

3次関数 $f(x)$ が極大値，極小値をもつための条件は，方程式 $f'(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつことである。

よって，$f'(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}>0 \iff a^2-4(a^2-9)>0 \iff -3a^2+36>0 \iff a^2<12$$

よって，求める a の値の範囲は　　$-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$

(2)　3次関数 $f(x)$ が $x>0$ で極大値，極小値をもつための条件は，$f'(x)=0$ が $x>0$ の範囲で異なる2つの実数解をもつことであるから

$$D>0 \text{ かつ } a>0 \text{ かつ } f'(0)>0$$

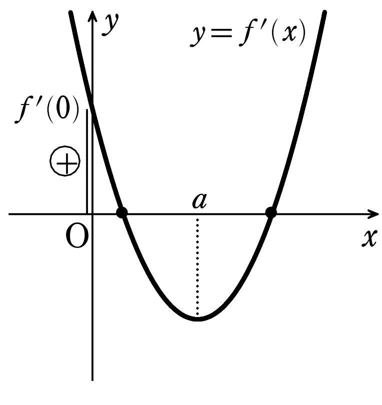
$D>0$ から　　$-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$　……①

$f'(0)>0$ から　　$4(a^2-9)>0$

これを解いて　　$a<-3,\ 3<a$　……②

求める a の値の範囲は，①かつ $a>0$ かつ②から

$$3<a<2\sqrt{3}$$



5　放物線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ 2p^2-4p+3)$ における接線の方程式は，

$f'(x)=4x-4$ から　　$y-(2p^2-4p+3)=(4p-4)(x-p)$

すなわち　　$y=4(p-1)x-2p^2+3$

この直線が放物線 $y=g(x)$ に接するから　　$4(p-1)x-2p^2+3=-x^2-2x-2$

すなわち $x^2+2(2p-1)x-2p^2+5=0$ の判別式 $D=0$ から

$(2p-1)^2-(-2p^2+5)=0$

ゆえに　$3p^2-2p-2=0$　……①

① は異なる 2 つの実数解をもち，それらを α，β とすると，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=\frac{2}{3},\ \alpha\beta=-\frac{2}{3}$$

よって，2 つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共通接線の方程式は

$$y=4(\alpha-1)x-2\alpha^2+3,\ \ y=4(\beta-1)x-2\beta^2+3$$

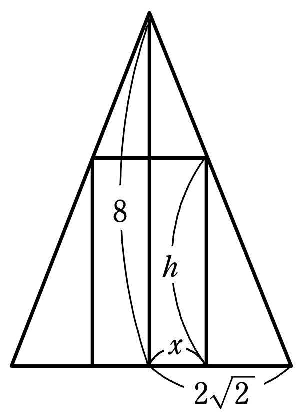
であるから，これら2 直線の交点の x 座標は　$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{1}{3}$

y 座標は　$y=4(\alpha-1)\cdot\dfrac{\alpha+\beta}{2}-2\alpha^2+3=2\{\alpha\beta-(\alpha+\beta)\}+3$

$$=2\left(-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)+3=\frac{1}{3}$$

したがって，求める交点の座標は　$\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

$\boxed{6}$ S の高さを h とすると　$8:2\sqrt{2}=h:(2\sqrt{2}-x)$



よって　$h=\dfrac{8(2\sqrt{2}-x)}{2\sqrt{2}}=8-2\sqrt{2}\,x\ (0<x<2\sqrt{2})$

また　$f(x)=\pi x^2h=\pi x^2(8-2\sqrt{2}\,x)$ であるから

$$\frac{1}{\pi}f'(x)=-6\sqrt{2}\,x^2+16x=-2x(3\sqrt{2}\,x-8)$$

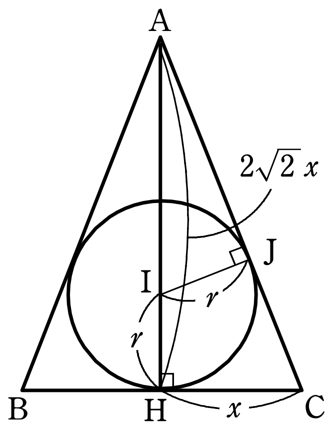
したがって $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{4\sqrt{2}}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	極大	↘	

ゆえに，$x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ のとき最大となる．

右の図のように A，B，C，H，I，J をとる．

ただし，点 A は円錐 T の頂点，点 B，C は円錐 T と円柱 S の接点，点 H は円柱 S と球 U の接点，点 I は球 U の中心，点 J は円錐 T と球 U の接点である．



CH$=x$ であるから，AH$=2\sqrt{2}\,x$ となり

$$\mathrm{AC}=\sqrt{x^2+(2\sqrt{2}\,x)^2}=3x$$

また，CH$=$CJ$=x$ より　AJ$=2x$

△AIJ において三平方の定理より

$$(2\sqrt{2}\,x-r)^2=r^2+(2x)^2$$

整理して　$4x(x-\sqrt{2}\,r)=0$

$x>0$ から　$r=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$

また　$g(x)=f(x)+\dfrac{4}{3}\pi\cdot\dfrac{x^3}{2\sqrt{2}}$ であるから

$$\frac{1}{\pi}g'(x)=-5\sqrt{2}x^2+16x=-x(5\sqrt{2}x-16)$$

したがって $g(x)$ の増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	$\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	極大	↘	

ゆえに，$x=\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$ のとき最大となる.

$\boxed{7}$ scienceは，c，eが各2個，i，n，sが各1個。

$$\frac{7!}{2!2!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot2\cdot1}={}^{ア}1260\ (通り)$$

(ア)において，s，i，nの区別をなくして　$\dfrac{1260}{3!}={}^{イ}210$ (通り)

$\boxed{8}$ k を定数とする。方程式

$$(x^2+y^2+2x+4y-4)+k(7x-y+2)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

は2点A，Bを通る円を表す。

① に $x=-1$，$y=2$ を代入すると

$$7-7k=0 \quad すなわち \quad k=1$$

① に代入して

$$x^2+y^2+2x+4y-4+(7x-y+2)=0$$

すなわち　$x^2+y^2+9x+3y-2=0$