試験時間60分　【解答解説】

$\boxed{1}$ A，A，A，B，C，D，E の 7 文字がある。

(1) 7 文字を横 1 列に並べる並べ方は $\boxed{}$ 通りある。

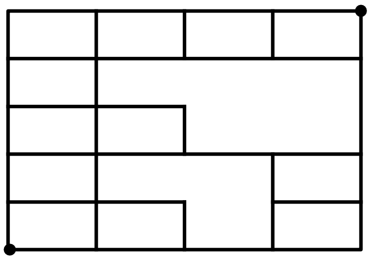
(2) 7 文字を横 1 列に並べるとき，A が隣り合わない並べ方は $\boxed{}$ 通りある。

(3) 7 文字を横 1 列に並べるとき，C，D，E の 3 文字がこの順に並んでいるような並べ方は $\boxed{}$ 通りある。ただし，C，D，E の間に他の文字が入る場合も含む。

(4) 7 文字から 5 文字を取り出して，横 1 列に並べる並べ方は $\boxed{}$ 通りある。

$\boxed{2}$ G，O，U，K，A，K，U の 7 文字を 1 列に並べるとき，同じ文字が隣り合わないような並べ方は何通りあるか。

$\boxed{3}$ 右図において，地点 A から地点 B への最短経路の総数は $\boxed{}$。



$\boxed{4}$ $x+y+z=9$ $(x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0)$ を満たす整数 $(x,\ y,\ z)$ の組の個数は ${}^{ア}\boxed{}$ 組であり，$x+y+z=9$ $(x\geqq 1,\ y\geqq 1,\ z\geqq 1)$ を満たす自然数 $(x,\ y,\ z)$ の組の個数は ${}^{イ}\boxed{}$ 組である。また，$2x+y+z=9$ $(x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0)$ を満たす整数 $(x,\ y,\ z)$ の組の個数は ${}^{ウ}\boxed{}$ 組である。

$\boxed{5}$ 「あ」，「い」，「う」，「え」，「お」，「か」，「き」，「く」，「け」，「こ」の文字の書かれた 10 枚のカードがある。この中から 4 枚のカードを選ぶ選び方のうち，「け」，「い」，「お」，「う」の文字の書かれたカードが少なくとも 1 枚は含まれるような選び方は全部で何通りあるか。

$\boxed{6}$ (1) 8 人を 3 つの部屋 A，B，C に入れる方法は何通りあるか。ただし，8 人全員が同じ部屋に入ってもよいものとする。

(2) 8 人を 3 つの組 A，B，C に分ける方法は何通りあるか。

$\boxed{7}$ 1 そうあたり 4 人まで乗れるボート 2 そうに 6 人が分乗するとき，次のような場合の乗り方は何通りあるか。

(1) 人もボートも区別しない場合　(2) 人は区別しないが，ボートは区別する場合

(3) 人もボートも区別する場合　(4) 人は区別するが，ボートは区別しない場合

$\boxed{8}$ $xyz=1000$ を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ は全部で何組あるか。

$\boxed{9}$ $x+y+z=15$ の正の整数解うちで $x>y$ となる解は何通りあるか。

$\boxed{1}$ 解答　(1)　840　　(2)　240　　(3)　140　　(4)　　480

$\boxed{2}$ 解答　660 通り

$\boxed{3}$ 解答　27

$\boxed{4}$ 解答　（ア）　55　　（イ）　28　　（ウ）　30

$\boxed{5}$ 解答　195 通り

$\boxed{6}$ 解答　(1)　6561 通り　　(2)　5796 通り

$\boxed{7}$ 解答　(1)　2 通り　　(2)　3 通り　　(3)　50 通り　　(4)　25 通り

$\boxed{8}$ 解答　36通り

$\boxed{9}$ 解答　42 通り

$\boxed{1}$ (1) $\dfrac{7!}{3!1!1!1!1!}=7\cdot6\cdot5\cdot4=840$ (通り)

(2) B，C，D，E の 4 文字を並べ，その両端と間の 5 か所から 3 か所を選んで A を入れると考える。

よって　$4!\times{}_5C_3=4\cdot3\cdot2\cdot1\times\dfrac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=240$ (通り)

(3) □ 3 個，A 3 個，B 1 個を 1 列に並べて，3 個の □ を左から C，D，E とすればよい。

よって　$\dfrac{7!}{3!3!1!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=140$ (通り)

(4) ▭ 1 個，A 3 個，B 1 個を 1 列に並べて，▭ に C，D，E をこの順で入れるとよい。よって　$\dfrac{5!}{1!3!1!}=5\cdot4=20$ (通り)

(5) 5 文字に含まれる A の個数で場合分けして考える。

[1] A が 1 個のとき

A，B，C，D，E の 5 文字を並べるから

$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ (通り)

[2] A が 2 個のとき

A 2 個と B，C，D，E から選んだ 3 個を並べるから

$\dfrac{5!}{2!1!1!1!}\times{}_4C_3=5\cdot4\cdot3\times4=240$ (通り)

[3] A が 3 個のとき

A 3 個と B，C，D，E から選んだ 2 個を並べるから

$\dfrac{5!}{3!1!1!}\times{}_4C_2=5\cdot4\times\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=120$ (通り)

以上から，求める並べ方の総数は　$120+240+120=480$ (通り)

$\boxed{2}$ G，O，A，2 つの U，2 つの K を 1 列に並べる方法は，全部で

$$\frac{7!}{2!2!}=1260 \text{ (通り)}$$

このうち，2 つの U が隣り合う並べ方は，2 つの U をまとめて U′ とみた，G，O，A，U′，2 つの K の順列と考えて　$\dfrac{6!}{2!}=360$ (通り)

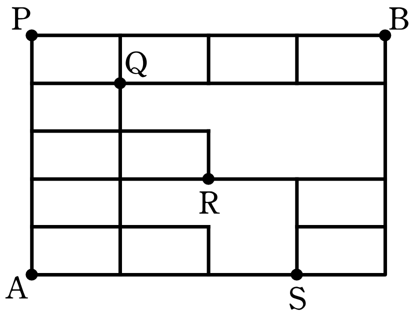
2 つの K が隣り合う並べ方も同様に　360 通り

2 つの U が隣り合い，かつ 2 つの K が隣り合う並べ方は，2 つの U をまとめて U′，2 つの K をまとめて K′とみた，G，O，A，U′，K′ の順列と考えて　$5!=120$ (通り)

よって，2 つの U が隣り合わず，かつ 2 つの K が隣り合わない並べ方は

$$1260-(360\times2-120)=660 \text{ (通り)}$$

3　A から B への最短経路は，右の図の P，Q，R，S の 4 点のうちのいずれか 1 つの点を通過する。



P を通る最短経路は　1 通り

Q を通る最短経路は　${}_5C_1\times{}_4C_1=20$（通り）

R を通る最短経路は　${}_3C_1\times1=3$（通り）

S を通る最短経路は　$1\times{}_3C_1=3$（通り）

したがって，最短経路の総数は

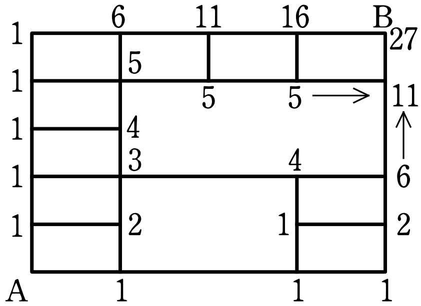
$1+20+3+3=27$

別解　最短経路を通るとき，途中のどの交差点 C も，すぐ左隣の交差点 D から入るか，またはすぐ下の交差点 E から入る。

したがって，A → C の経路の数は，A → D の経路の数と A → E の経路の数の和となる。

これを繰り返せば，図より最短経路の総数は

27



4　$x+y+z=9$ ($x\geqq0$，$y\geqq0$，$z\geqq0$) を満たす整数の組の個数は，異なる 3 種のものから 9 個を取る重複組合せの数で　${}_3H_9={}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2={}^{ア}55$（組）

$x-1=X$，$y-1=Y$，$z-1=Z$ とおく。

$x+y+z=9$ から　$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=9$

よって　$X+Y+Z=6$　($X\geqq0$，$Y\geqq0$，$Z\geqq0$)

これを満たす整数の組の個数は，異なる 3 種のものから 6 個を取る重複組合せの数で

$${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2={}^{イ}28\text{（組）}$$

$2x+y+z=9$ から　$y+z=9-2x$

$y+z=9-2x$ ($x\geqq0$，$y\geqq0$，$z\geqq0$)　…… ① を満たす整数の組の個数は，異なる 2 種のものから $9-2x$ 個を取る重複組合せの数である。

$9-2x=k$ とすると　${}_2H_k={}_{2+k-1}C_k={}_{k+1}C_k={}_{k+1}C_1=k+1$（組）

① において，$x=0$，1，2，3，4 であるから　$k=9$，7，5，3，1

したがって，① を満たす組の個数は

$$(9+1)+(7+1)+(5+1)+(3+1)+(1+1)={}^{ウ}30\text{（組）}$$

5　異なる 10 枚のカードから 4 枚のカードを選ぶ選び方は　${}_{10}C_4=210$（通り）

また，選ばれた 4 枚のカードの中に「け」，「い」，「お」，「う」の文字の書かれたカードが 1 枚も含まれない選び方は　${}_6C_4=15$（通り）

よって，求める選び方の総数は　$210-15=195$（通り）

6　(1)　8 人のそれぞれについて，A，B，C 3 通りの部屋の選び方があるから

$3^8=6561$（通り）

(2)　(1) から 8 人を 2 つの部屋に入れる場合と，1 つの部屋に入れる場合を除けばよいから

$6561-(2^8-2)\times3-3=5796$（通り）

7 (1)　4人と2人に分ける場合と3人と3人に分ける場合の　　2通り

(2)　ボートをA，Bとすると

[1]　Aに4人，Bに2人乗せる

[2]　Aに3人，Bに3人乗せる

[3]　Aに2人，Bに4人乗せる

の3通り。

(3)　(2)において，人に区別がある場合を考えればよい。

[1]　Aに4人，Bに2人乗せる場合　　${}_6C_4={}_6C_2=15$（通り）

[2]　Aに3人，Bに3人乗せる場合　　${}_6C_3=20$（通り）

[3]　Aに2人，Bに4人乗せる場合　　${}_6C_2=15$（通り）

よって　　$15+20+15=50$（通り）

(4)　(3)でボートA，Bの区別をなくすと，同じ乗り方が2!通りずつあるから

$50\div 2!=25$（通り）

8　$100=2^2\cdot 5^2$であるから，$x=2^{a_1}\cdot 5^{b_1}$，$y=2^{a_2}\cdot 5^{b_2}$，$z=2^{a_3}\cdot 5^{b_3}$とすると

$a_1+a_2+a_3=2$（a_iは負でない整数，$i=1,\ 2,\ 3$），

$b_1+b_2+b_3=2$（b_jは負でない整数，$j=1,\ 2,\ 3$）

よって，$xyz=100$を満たす正の整数の組$(x,\ y,\ z)$の総数は，上と同様に考えて

$({}_3H_2)^2=({}_{3+2-1}C_2)^2=({}_4C_2)^2=6^2=36$（組）

9 (Step1)　不等式の条件がないものとして数える。

$x-1=X$，$y-1=Y$，$z-1=Z$とおく。

$x+y+z=15$に代入すると　　$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=15$

よって　　$X+Y+Z=12$　　$X\geqq 0$，$Y\geqq 0$，$Z\geqq 0$

この整数解の個数は，異なる3種のものから12個を取る重複組合せの数で

${}_3H_{12}={}_{3+12-1}C_{12}={}_{14}C_{12}={}_{14}C_2=91$（通り）

(Step2)　$x=y$とすると　　$2x+z=15$

正の整数解は　$(x,\ z)=(1,\ 13),\ (2,\ 11),\ (3,\ 9),\ (4,\ 7),$

$(5,\ 5),\ (6,\ 3),\ (7,\ 1)$　の　　7通り

(Step3)　(Step1)の整数解については，$x>y$，$x=y$，$x<y$の3通りの場合に分けられ，しかも，xとyについて対称であるから，$x>y$と$x<y$の場合の数は等しい。

よって，求める解の数は，(Step1)の個数から(Step2)の場合を除いた半分で

$(91-7)\div 2=42$（通り）