YAWARAKA 先生のテキスト 解答 ⑫4 三角比・平面図形

平面図形篇

標準問題

①標-1-1

3辺の長さが $2x+1,\ x^2-1,\ x^2+x+1$ である三角形について，

(1) $2x+1,\ x^2-1,\ x^2+x+1$ が三角形の3辺となるための x の条件を求めよ。

(2) 最大辺に対する角の大きさを求めよ。

(1) 三角形ができる条件は，次の①，②，③をすべて満たすこと．

$(2x+1)+(x^2-1)>x^2+x+1$ ……①

$(x^2-1)+(x^2+x+1)>2x+1$ ……②

$(x^2+x+1)+(2x+1)>x^2-1$ ……③

①を整理すると，$x>1$

②より，$2x^2-x-1>0$ $\quad\therefore\ (2x+1)(x-1)>0$

$\therefore\ x<-\dfrac{1}{2}$ または $1<x$

③より，$3x+3>0$ $\quad\therefore\ x>-1$

これらより，$\boldsymbol{x>1}$

(2) $(x^2+x+1)-(2x+1)=x^2-x=x(x-1)>0$

$(x^2+x+1)-(x^2-1)=x+2>0$

よって，3辺のうち最大の辺は，x^2+x+1．この対角を θ とすると，

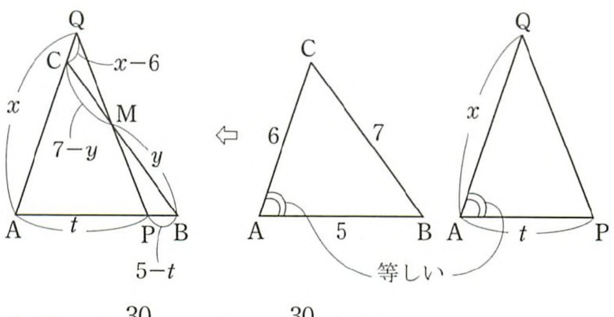
$$\cos\theta=\frac{(x^2-1)^2+(2x+1)^2-(x^2+x+1)^2}{2(x^2-1)(2x+1)}=\frac{-(2x^3+x^2-2x-1)}{2(2x^3+x^2-2x-1)}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore\ \boldsymbol{\theta=120^\circ}$

①標-1-2

三角形 ABC は AB＝5，AC＝6，BC＝7 を満たすとする。辺 AB 上に点 P を取り，AP＝t とおく。$(0<t<5)$。また，辺 AC の C の側への延長上に点 Q を，三角形 ABC の面積と三角形 APQ の面積が等しくなるように取り，BC と PQ の交点を M とする。BM の長さおよび AQ の長さを t で表せ。

AQ＝x，BM＝y とおくと，右図のようになる．



△ABC：△APQ＝5･6：t･x

△ABC＝△APQ より，$tx=30$ $\quad\therefore\ x=\boldsymbol{\dfrac{30}{t}}$

△ABC と直線 PQ に関してメネラウスの定理を適用し，

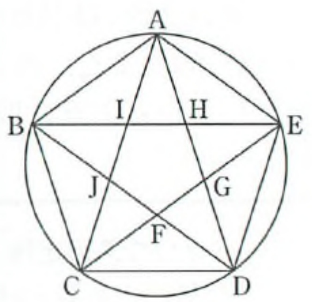
$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\times\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MC}}\times\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1 \qquad \therefore\ \frac{t}{5-t}\times\frac{y}{7-y}\times\frac{x-6}{x}=1$$

$\therefore\ y(x-6)t=(7-y)(5-t)\cdot x$ $\quad\therefore\ y\left(\dfrac{30}{t}-6\right)t=(7-y)(5-t)\cdot\dfrac{30}{t}$ $\quad$ ⇦ $x=\dfrac{30}{t}$ を代入

両辺を $6(5-t)$ で割って，$y=(7-y)\cdot\dfrac{5}{t}$ $\quad\therefore\ y=\boldsymbol{\dfrac{35}{t+5}}$ $\quad$ ⇦ $\left(\dfrac{30}{t}-6\right)t=6(5-t)$

①$\boxed{\text{標-1-3}}$

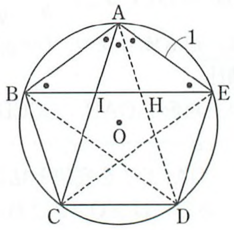
円に内接する1辺の長さが1の正五角形ABCDEがある。点F, G, H, I, Jは対角線の交点である。



(1) △ABEと△IBAが相似であることを示せ。
またEIを求めよ。

(2) BE, BIの長さを求めよ。

(3) 正五角形ABCDEの面積をS_1，五角形FGHIJの面積をS_2とおくとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$の値を求めよ。



(1) 円周角の定理より，•の角の大きさが等しいので，二角相等により，△ABE∽△IBA
∠EIA＝2×• により，△EAIは∠A＝∠Iの二等辺三角形だから，EI＝EA＝**1**

(2) BE＝xとおく．
BI＝BE−EI＝$x-1$
△ABE∽△IBAより，
BA : BE＝BI : BA　∴ $1 : x=(x-1) : 1$

∴ $x(x-1)=1$　∴ $x^2-x-1=0$　$x>0$より，$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

よって，$\mathbf{BE}=\dfrac{\mathbf{1+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$，$\mathbf{BI}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-1=\dfrac{\mathbf{-1+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$

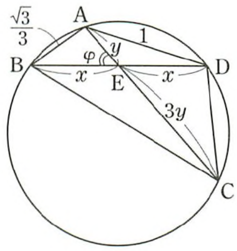
(3) 1辺の長さの比を求める．

$\mathrm{IH}=\mathrm{BH}-\mathrm{BI}=1-\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

よって，$\dfrac{S_2}{S_1}=\left(\dfrac{\mathrm{IH}}{\mathrm{AB}}\right)^2=\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{14-6\sqrt{5}}{4}=\dfrac{\mathbf{7-3\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$

①$\boxed{\text{標-1-4}}$

円周上に4点A, B, C, Dをこの順に時計と逆回りにとる。△ABCと△ACDの面積が等しく，△BCDの面積は△ABDの面積の3倍である。さらに$\mathrm{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，AD＝1であるとき，AC, BDを求めよ。



BE : ED＝△ABC : △ADC＝1 : 1
AE : EC＝△BAD : △BCD＝1 : 3
BE＝ED＝x，AE＝y，EC＝$3y$とおく．
方べきの定理より，
EA•EC＝EB•ED　∴ $y\cdot 3y=x^2$
　∴ $x=\sqrt{3}\,y$
図のようにφをおく．
△ABEと△ADEで余弦定理を用いる．
$\mathrm{AB}^2=x^2+y^2-2xy\cos\varphi$，$\mathrm{AD}^2=x^2+y^2+2xy\cos\varphi$
辺々足して，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2=2(x^2+y^2)$

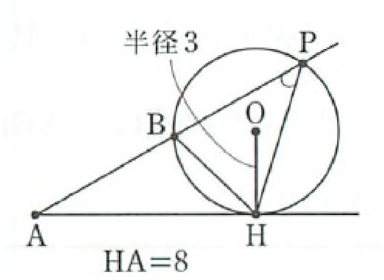
∴ $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1^2=2\{(\sqrt{3}\,y)^2+y^2\}$

∴ $8y^2=\dfrac{4}{3}$　∴ $y=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$，$\mathbf{AC}=4y=\dfrac{4}{\sqrt{6}}=\dfrac{\mathbf{2\sqrt{6}}}{\mathbf{3}}$

∴ $x=\sqrt{3}\,y=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\mathbf{BD}=2x=\sqrt{\mathbf{2}}$

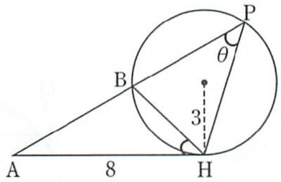
①$\boxed{\text{標}\textbf{-1-5}}$

右図のように半径 3 の円 O の周上の点 H における接線を引き，その上に HA＝8 となる点 A をとる。円周上の点 P と A とを結ぶ直線が円 O と 2 点で交わるとし，そのもう 1 つの点を B とする。このとき，B は線分 PA 上にあるとする。$\sin\angle BPH=\frac{12}{13}$ のとき，次のそれぞれの値を求めよ。



（1）BH　　（2）AB　　（3）AP　　（3）△APH の面積

右図のように，$\angle BPH=\theta$ とおく．



（1） △PBH に正弦定理を用いて，

$$\frac{BH}{\sin\theta}=2\cdot 3$$

$$\therefore\quad BH=2\cdot 3\cdot\sin\theta=6\cdot\frac{12}{13}=\mathbf{\frac{72}{13}}$$

（2） 接弦定理より，$\angle BHA=\angle BPH=\theta$

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$$

△ABH に余弦定理を適用して，

$$AB^2=8^2+\left(\frac{72}{13}\right)^2-2\cdot 8\cdot\frac{72}{13}\cos\theta=\frac{8^2}{13^2}(13^2+9^2-2\cdot 9\cdot 5)$$

$$\therefore\quad AB=\frac{8}{13}\sqrt{160}=\mathbf{\frac{32\sqrt{10}}{13}}$$

（3） 方べきの定理より，$AP\cdot AB=AH^2$

$$AP=\frac{AH^2}{AB}=\frac{8^2}{AB}=64\cdot\frac{13}{32\sqrt{10}}=\mathbf{\frac{13\sqrt{10}}{5}}$$

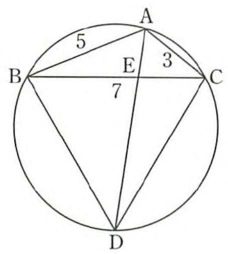
（4） $\triangle APH=\frac{AP}{AB}\triangle ABH$

$$=\frac{13\sqrt{10}}{5}\cdot\frac{13}{32\sqrt{10}}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{72}{13}\cdot 8\cdot\frac{12}{13}\right)=\mathbf{\frac{108}{5}}$$

①$\boxed{\text{標}\textbf{-1-6}}$

AB＝5，BC＝7，CA＝3 の△ABC において，∠A の 2 等分線が△ABC の外接円と交わる点を D，BC と AD との交点を E とするとき，次の値を求めよ。

（1）cos∠BAC の値　　（2）AE の長さ（3）　　AD の長さ



（1） $\cos\angle BAC=\frac{5^2+3^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 3}=\mathbf{-\frac{1}{2}}$

（2）（1）より，$\angle BAC=120°$．AD が角の二等分線であることより，$\angle BAE=\angle CAE=60°$

△ABE＋△ACE＝△ABC であるから，

$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot AE\cdot\sin 60°+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot AE\cdot\sin 60°=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot\sin 120°$$

$$\therefore\quad AE=\mathbf{\frac{15}{8}}$$

（3） AE は ∠A の二等分線だから，BE：EC＝AB：AC＝5：3

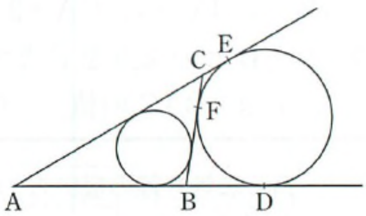
$$BE=\frac{5}{5+3}BC=\frac{35}{8},\quad EC=\frac{3}{5+3}BC=\frac{21}{8}$$

方べきの定理より，$EA\cdot ED=EB\cdot EC$

$$\therefore\quad ED=\frac{EB\cdot EC}{EA}=\frac{35}{8}\cdot\frac{21}{8}\cdot\frac{8}{15}=\frac{49}{8},\quad AD=AE+ED=\frac{15}{8}+\frac{49}{8}=\mathbf{8}$$

①標**-1-7**

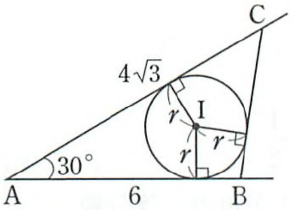
右図のように，△ABC において，AB＝6，CA＝$4\sqrt{3}$ ，∠BAC＝30°，∠A 内の傍接円（辺 BC および辺 AC,AB の延長に接する円）の接点を D，E，F とするとき，BC＝$\boxed{}$となり，△ABC の内接円の半径は$\boxed{}$である。また，FC＝$\boxed{}$となり，傍接円の半径は$\boxed{}$である。



△ABC に余弦定理を用いて，

$BC^2=6^2+(4\sqrt{3})^2-2\cdot6\cdot4\sqrt{3}\cos30^\circ=12$

∴ $BC=\mathbf{2\sqrt{3}}$



内接円の中心を I，半径を r とすると，

△ABC＝△ABI＋△BCI＋△CAI ………①

$\frac{1}{2}\cdot6\cdot4\sqrt{3}\sin30^\circ=\frac{1}{2}\cdot6r+\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}r+\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{3}r$

$r=\frac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+3}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3-1}=\mathbf{3-\sqrt{3}}$

CF＝CE＝a，BF＝BD＝b とおくと，

BC＝$2\sqrt{3}$ より，$a+b=2\sqrt{3}$，AE＝AD より，$4\sqrt{3}+a=6+b$

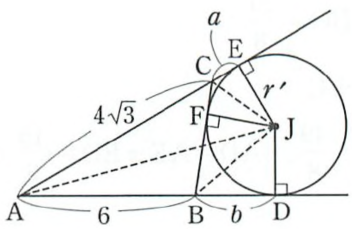
したがって，$a=\mathbf{3-\sqrt{3}}$，$b=3\sqrt{3}-3$

傍接円の中心を J，半径を r' とすると，

△ABC＝△AJC＋△AJB－△BJC

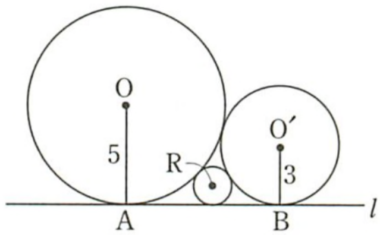
$\frac{1}{2}\cdot6\cdot4\sqrt{3}\sin30^\circ=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{3}r'+\frac{1}{2}\cdot6r'-\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}r'$

$r'=\frac{6\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{3^2-3}=\mathbf{3\sqrt{3}-3}$



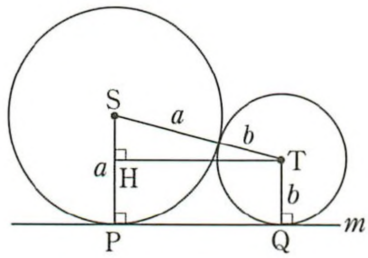
①$\boxed{\text{標-1-8}}$

右図のように半径５の円Ｏと半径３の円Ｏ′が接しており，この２つの円に直線lが点 A, B で接している。さらに円Ｏ，円Ｏ′，直線lに接する円Ｒがある。このとき，AB＝$\boxed{}$であり，円Ｒの半径の長さrはr＝$\boxed{}$である。



解 答

右図のように，接する２円 S，T が直線 m に P，Q で接している構図で，PQ の長さを求めておく．



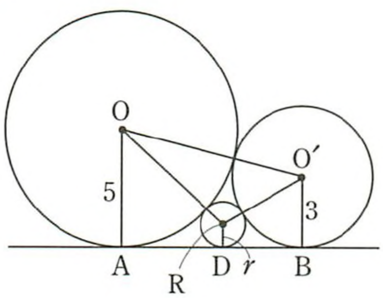
H は T から SP に下ろした垂線の足とする．

△SHT に三平方の定理を用いて，

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{TH}=\sqrt{\mathrm{ST}^2-\mathrm{SH}^2}$$

$$=\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2}=\sqrt{4ab}=2\sqrt{ab}$$

右図で，円 O，O′ に上の事実を用いて，



$$\mathrm{AB}=2\sqrt{5\cdot3}=\mathbf{2\sqrt{15}}$$

R と AB の接点を D とする．

右図で，円 O，R に上の事実を用いて，

$$\mathrm{AD}=2\sqrt{5\cdot r}=2\sqrt{5}\sqrt{r}$$

円 R，O′ に上の事実を用いて，

$$\mathrm{DB}=2\sqrt{3\cdot r}=2\sqrt{3}\sqrt{r}$$

ここで，AB＝AD＋DB　　$\therefore\ 2\sqrt{15}=2\sqrt{5}\sqrt{r}+2\sqrt{3}\sqrt{r}$

$$\therefore\ \sqrt{r}=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\qquad\therefore\ r=\frac{15}{8+2\sqrt{15}}=\mathbf{\frac{15}{2}(4-\sqrt{15})}$$