談話室マロニエ　数学 QUIZ　集合・論理

A 問題

集合：ものの集まり

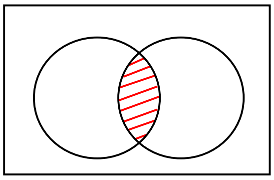
記号　奇数の自然数全体の集合を A とする。

$A=\{1,3,5,7,9,\cdots\}$　や，$A=\{2n-1 \mid n\text{は自然数}\}$　などと表す

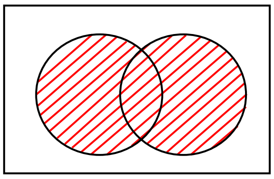
x が集合 A の要素（元）のとき，　ア　で表す。

〔**ベン図**〕：A, B ：集合とする。斜線部を記号であらわせ。

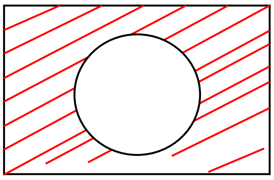
共通部分



和集合

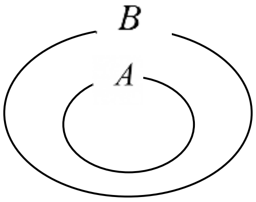


補集合



　イ　，　ウ　，　エ　←記号

包含関係



　オ　と表す。「A は B に含まれる」

⇔　$x\in A$ ならば必ず $x\in B$

ド・モルガンの法則

$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$　←　かつ＝$\overline{\text{または}}$

$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$　←　または＝$\overline{\text{かつ}}$

命題 $A \longrightarrow B$ に対し，

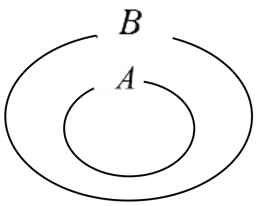
逆　（$\boxed{\text{カ}}$）
裏　（$\boxed{\text{キ}}$）
対偶（$\boxed{\text{ク}}$）

逆・裏・対偶

元の命題と $\boxed{\text{ケ}}$ の真偽は一致する。
また，逆と $\boxed{\text{コ}}$ の真偽は一致する。

必要条件，十分条件

$\underbrace{A}_{\text{小}} \subset \underbrace{B}_{\text{大}}$ のとき $\boxed{\text{サ}}$ ならば $\boxed{\text{シ}}$ が真



このとき，
A は B のための $\boxed{\text{ス}}$ 条件，B は A のための $\boxed{\text{セ}}$ 条件とよぶ。

真偽の判定

① 直接証明、間接証明（背理法、対偶に帰着）
② 偽のときは、「反例」を探す
③ 集合の包含関係に帰着

鳩の巣の原理（ディリクレ論法，部屋割り論法）

m, n を自然数，$n > m$ とする。n 個のものを m 組に分けるとき，少なくとも一つの組は 2 個以上のものを含む。

【補充問題】YAWARAKA先生のテキストより

標準問題

①標-1-1

$\boxed{}$ に適する語句を (ア)〜(エ) の中から 1 つ選べ．ただし，x，y，z，w はすべて実数とする．

(1) $a+b$，ab が有理数であることは，a，b が有理数であるための $\boxed{}$

(2) $xy=z$ であることは，$x=\dfrac{z}{y}$ であるための $\boxed{}$

(3) $x>y$ であることは，$x^2>y^2$ であるための $\boxed{}$

(4) $\sqrt{x}=y$ であることは，$x=y^2$ であるための $\boxed{}$

(5) $x<y$ かつ $z<w$ であることは，$x-z<y-w$ であるための $\boxed{}$

(6) $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$ であることは，$x=y=z$ であるための $\boxed{}$

(7) $x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}=z\overrightarrow{a}+w\overrightarrow{b}$ であることは $x=z$ かつ $y=w$ であるための $\boxed{}$

(8) $x>0$ かつ $y>0$ であることは，$x+y>0$ かつ $xy>0$ であるための $\boxed{}$

(9) $x\geqq 1$ かつ $y\geqq 1$ であることは，$x+y\geqq 2$ かつ $xy\geqq 1$ であるための $\boxed{}$

(ア) 必要十分条件である．
(イ) 必要条件ではあるが，十分条件ではない．
(ウ) 十分条件ではあるが，必要条件ではない．
(エ) 必要条件でも十分条件でもない．

①標-1-2

次の命題の逆・裏・対偶を述べ，その真偽をいえ．

$$|x|+|y|>1 \text{ ならば，} |x|>1 \text{ または } |y|>1$$

①$\boxed{\text{標-10-3}}$

実数 α，β，γ が $\alpha+\beta+\gamma=3$ を満たしているとき，
$p=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$，$q=\alpha\beta\gamma$ とおく。

(1) $p=q+2$ のとき，α，β，γ の少なくとも１つは１であることを示せ。

(2) $p=3$ のとき，α，β，γ はすべて１であることを示せ。

$\boxed{\text{発展問題}}$（出典は「ふつうのテキスト」）

①$\boxed{\text{1-C-1}}$

次の条件 p，q に対し，p は q の必要条件か，十分条件か，必要十分条件か，そのいずれでもないかを答えよ。

(1)　p : $x^2+y^2<1$　　　q : $|x|+|y|<1$

(2)　p : 命題 r が真である　　　q : 命題 r の逆が真である

(3)　p : a が 3 の倍数である　　　q : aの平方が 3 の倍数である（ただし，a は整数）

(4)　p : $|a+b|<|a|+|b|$　　　q : $ab>0$

①$\boxed{\text{1-C-2}}$

実数 c に関する以下の条件（A）$|c|\leqq 2$ を考える。

以下の(1)から(6)の c に関する条件は，それぞれ上の条件（A）が成り立つための

(a)　必要条件であるが十分条件でない

(b)　十分条件であるが必要条件でない

(c)　必要十分条件である

(d)　必要条件でも十分条件でもない

のいずれであるか。

(1)　$c\leqq 2$　　　(2)　$c^2-2\leqq 0$

(3)　すべての実数 x に対して $x^4-c\geqq 0$

(4)　ある実数 x があり $(x-1)^2+c^2\leqq 4$ となる

(5)　$x<1$ ならば $cx<2$

(6)　x の 2 次方程式 $x^2+cx+1=0$ は実数解をもたない

①$\boxed{\text{1-C-3}}$

(1)　$a:b=2:3$，$b:c=2:3$ のとき，$a^2+bc+\dfrac{9}{b^2}+\dfrac{9}{ac}$ の最小値を求めよ。

(2)* $x>0$，$y>0$，$x+y=1$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}$ の最小値を求めよ。

(3)* $\dfrac{4}{\sin^2\theta}+\dfrac{9}{\cos^2\theta}$ の最小値を求めよ。

①$\boxed{\text{1-C-4}}$

文字がすべて正の数であるとき，次の不等式を証明せよ。

(1) $m+n=1$ ならば，$\dfrac{m}{a}+\dfrac{n}{b}\geqq\dfrac{1}{am+bn}$ である。

(2) $p+q+r=1$ ならば，$\dfrac{p}{a}+\dfrac{q}{b}+\dfrac{r}{c}\geqq\dfrac{1}{ap+bq+cr}$ である。

①$\boxed{\text{1-C-5}}$

a，b，c を正の実数とするとき，次のFとGの値の大小を比較せよ。

$F=(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)$，$G=(a^2+b^2+c^2)^2$

①$\boxed{\text{1-C-6}}$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{2}$，$x>2$，$y>2$ のとき $2x+y$ の最小値を求めよ。

①$\boxed{\text{1-C-7}}$

命題「$|x-b|+|y-b|\leqq b$ ならば $x^2+y^2<125$ である」が真であるような整数 b のうち最大のものを求めよ。

有名問題

【Ｉ】

p，q を互いに素な自然数とする。

(1)　すべての整数 x に対して，p 個の整数 $x-q$，$x-2q$，……，$x-pq$ を p で割った余りはすべて異なることを証明せよ。

(2)　$x>pq$ を満たすすべての整数 x は，ある自然数 a，b を用いて $x=ap+bq$ と表されることを証明せよ。

【２】

$a_1>a_2>\cdots\cdots>a_n$ および $b_1>b_2>\cdots\cdots>b_n$ を満たす $2n$ 個の実数がある．集合 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n\}$ から要素を１つ，集合 $\{b_1,\ b_2,\ \cdots\cdots,\ b_n\}$ から要素を１つ取り出して，掛け合わせて積を作る．どの要素も一度しか使わないこととし，この操作をくり返し，n 個の積を作り，それら n 個の積の和を S とする．

(1)　$n=2$ のとき，S の最大値と最小値を求めよ．

(2)　n が２以上のとき，S の最大値と最小値を求めよ．　　　（お茶の水女子大）